2.4 Exercices

2.1

a) Calculer la norme des vecteurs suivants :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.8 \end{pmatrix}$$

b) Vérifier que le vecteur suivant est unitaire (de norme 1) : $\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

c) On donne les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\|\overrightarrow{a}\| + \|\overrightarrow{b}\| + \|\overrightarrow{c}\|; \|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\|; \|-2\overrightarrow{a}\| + 2\|\overrightarrow{a}\|; \|\overrightarrow{a}\|\overrightarrow{c}; \frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|}\overrightarrow{a}; \left\|\frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|}\overrightarrow{a}\right\|$$

d) On donne $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ k-1 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre k sachant que la norme de $\overrightarrow{d}$ vaut 10.

e) On donne $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre m tel que

$$\|\overrightarrow{u} + m\overrightarrow{v}\| = \sqrt{82}$$

xx

2.2

Calculer en valeur approchée le périmètre du triangle ABC avec $A(2;1), B(4;3)$ et $C(2;6)$.

2.3

Soit $A(7;1)$, $B(5;5)$, $C(5;-3)$ et $I(2;1)$.
Prouver que les points A, B et C sont situés sur le même cercle centré en I.

2.4

Déterminer k pour que $P(2;-1)$ soit situé sur la médiatrice du segment AB, si $A(5;3)$ et $B(-2;k)$.

2.5

On donne $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Evaluer les expressions suivantes lorsqu'elles sont définies :

a) $\overrightarrow{a} \bullet \left(7\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$

b) $\left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{b}$

c) $\left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}\right) + \left(\overrightarrow{c} \bullet \overrightarrow{d}\right)$

d) $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \bullet \left(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}\right)$

e) $\|\overrightarrow{d}\|\left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{d}\right)$

f) $\overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{c}\right)$

2.6

Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont perpendiculaires :

a) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 53 \\ -41 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 41 \\ 53 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

2.7

On donne les points $A(-2;4)$, $B(1;-2)$ et $C(k;k), k \in \mathbb{R}$.
Déterminer k pour que le triangle ABC soit rectangle

a) en A ; b) en B ; c) en C ;

Représenter ensuite les solutions sur une figure à l'échelle.

2.8

On donne les points $A(-2;-1)$, $B(7;0)$ et $C(1;5)$.
Déterminer les coordonnés du sommet D du parallélogramme $ABCD$ et calculer son aire.

2.9

Etablir que le triangle ABC est isocèle, puis calculer son aire si $A(6;4)$, $B(12;-2)$ et $C(17;9)$.

2.10

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze rectangle non rectangle, puis calculer son aire, si $A(7;5), B(8;7), C(12;5)$ et $D(13;2)$.

2.11

Relativement à un repère orthonormé on considère les points $A(3;-4)$ et $C(5;2)$.

Sachant que A et C sont les sommets non consécutifs d'un carré $ABCD$, déterminer les coordonnées de B et D.

2.12

Relativement à un repère orthonormé on considère les points $A(0;2)$, $B(6;6)$, $C(8;3)$ et $D(2;-1)$

a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Démontrer.
b) Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

2.13

Relativement à un repère orthonormé on considère les points $A(-3;-2)$, $B(3;0)$, $C(5;6)$ et $D(-1;4)$

a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Démontrer.
b) Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

2.14

Relativement à un repère orthonormé, on considère les points $A(-1;2)$ et $B(7;8)$.

Calculer les coordonnées du point P situé sur le segment AB et situé à une distance de 7 unités du point A.

2.15

Soit $A(-7;-3)$, $B(1;3)$ et $C(-1;4)$.
Calculer la longueur de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

2.5 Réponses

2.1

a) 5 ; $\sqrt{73}$; $\sqrt{6.5}$; 1.

c) 24 ; $\sqrt{82}$; 20 ; $\begin{pmatrix} -30 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$; 1

d) $k = -5$ ou $k = 7$

e) $m = -2.3$ ou $m = 1.5$

2.2

$\sqrt{8} + \sqrt{13} + 5 \simeq 11.43$

2.3

$\|\overrightarrow{IB}\| = \|\overrightarrow{IA}\| = \|\overrightarrow{IC}\| = 5$

2.4

$k = -4$ ou $k = 2$

2.5

a) 102

b) $\begin{pmatrix} 55 \\ -11 \end{pmatrix}$

c) 14

d) 50

e) 36

f) Pas défini.

2.6

a) Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ ne sont pas perpendiculaires.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont perpendiculaires.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont perpendiculaires.

d) Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ ne sont pas perpendiculaires.

2.7

a) $k = 10$

b) $k = -5$

c) $k = -2$ ou $k = 2.5$

2.8 $D(-8; 4)$; son aire vaut 51 [u^2].

2.9

Le triangle est isocèle car $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$. Son aire vaut 48 [u^2].

2.10

Son aire vaut 12.5 [u^2].

2.11

$B(7;-2)$, $D(1;0)$ ou l'inverse

2.12

$ABCD$ est un rectangle d'aire 26 [u^2]

2.13

$ABCD$ est un losange d'aire 32 [u^2]

2.14

$P(4.6;6.2)$

2.15

$h=2$