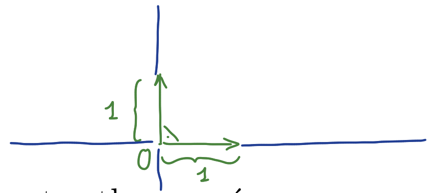
Chapitre 2

Géométrie métrique

2.1 Base orthonormée, repère orthonormé

Dans le plan,

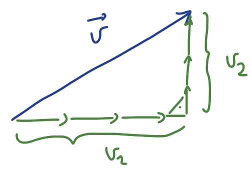
- une **base** $B = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est **orthonormée** si $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ et $\|\overrightarrow{e_1}\| = \|\overrightarrow{e_2}\| = 1$.
- le **repère** $R = (O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est **orthonormé** si la base associée $B = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ est orthonormée.



Une base orthonormée du plan est parfois notée $B = (\vec{i}\,; \vec{j}\,)$ et le repère orthonormé se note $R = (O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.

Norme d'un vecteur dans une base orthonormée

$$\|\vec{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$



Remarque 1

a) Les affirmations ci-dessus sont fausses si la base n'est pas orthonormée !

b) Pour calculer la distance entre deux points A et B du plan, on calcule $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Exemple 2.1.

Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(-1; -9), B(-10; 3)$ et $C(6; 15)$. Prouver que le triangle ABC est rectangle.

ABC est rectangle si $a^2 = b^2 + c^2$

ou $b^2 = a^2 + c^2$

ou $c^2 = a^2 + b^2$

(suite p. suivante)

Calculons la mesure de chaque coté de ce triangle, en calculant la norme des vecteurs correspondants :

Côté a ou BC :

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ \|\vec{BC}\| = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20$$

Coté b ou AC

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \ \|\vec{AC}\| = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$$

Côté c ou AB

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \ \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-9)^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144}$$

$$= \sqrt{225} = 15$$

On voit que $20^2 + 15^2 = 625$ donc $20^2 + 15^2 = 25^2$

$(a^2 + c^2 = b^2)$

$\Rightarrow$ le triangle est rectangle de sommet B. #