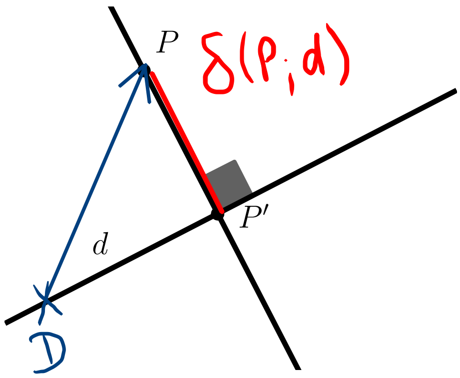
4.5 Distance d'un point à une droite du plan



La distance $\delta(P;d)$ d'un point P à une droite d est la distance entre les points P et P', où P' est la projection orthogonale du point P sur la droite d (soit le pied de la perpendiculaire à d passant par P).

Théorème 4.1 (*Distance d'un point à une droite*)

a) *Soit la droite d passant par le point D et de vecteur normal $\vec{n}$. La distance d'un point P à la droite d est donnée par*

$$\delta(P;d) = \frac{|\overrightarrow{DP} \bullet \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

b) *Soit la droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. La distance d'un point $P(p_1;p_2)$ à la droite d est donnée par*

$$\delta(P;d) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exemple 4.7.

On donne le point $P(-2;1)$ et les droites d et e d'équations respectives

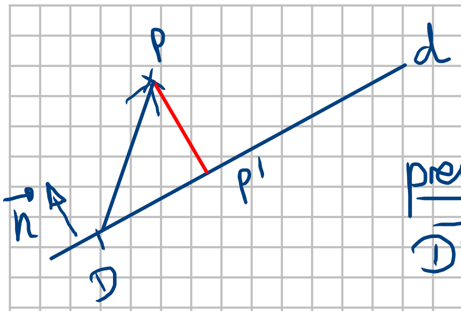
$$(d) \quad 3x - 4y + 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad (e) \begin{cases} x = 1 + 12k \\ y = 2 - 5k \end{cases}$$

Calculer $\delta(P;d)$ et $\delta(P;e)$.

1) $\delta(P;d) = \dfrac{|3\cdot(-2) - 4\cdot 1 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{9}{5}$ u

2) $E(1;2)$ et $\vec{d_e} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n_e} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EP} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\delta(P;e) = \dfrac{|\overrightarrow{EP} \cdot \vec{n_e}|}{\|\vec{n_e}\|} = \dfrac{|-15-12|}{\sqrt{25+144}} = \dfrac{27}{13}$ u



a) $\delta(P,d) = \dfrac{|\overrightarrow{DP}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

preuve :

$\overrightarrow{DP}\cdot\vec{n} = (\overrightarrow{DP'} + \overrightarrow{P'P})\cdot\vec{n}$

$= \underbrace{\overrightarrow{DP'}\cdot\vec{n}}_{=0} + \overrightarrow{P'P}\cdot\vec{n}$

$= \overrightarrow{P'P}\cdot\vec{n} = \|\overrightarrow{P'P}\|\cdot\|\vec{n}\|\cdot\cos(\alpha)$, α angle entre $\overrightarrow{P'P}$ et $\vec{n}$

or $\alpha = 0°$ ou $\alpha = 180°$

$\Rightarrow |\overrightarrow{DP}\cdot\vec{n}| = \|\overrightarrow{P'P}\|\cdot\|\vec{n}\|\cdot\underbrace{|\cos(\alpha)|}_{=1}$

$\Rightarrow \underbrace{\|\overrightarrow{P'P}\|}_{\delta(P;d)} = \dfrac{|\overrightarrow{DP}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

b) $\delta(P;d) = \dfrac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ avec $P(p_1;p_2)$

$d: ax+by+c=0$

preuve : $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Soit $D(d_1;d_2) \in d \Rightarrow ad_1 + bd_2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -ad_1 - bd_2$ ⊛

$\delta(P;d) = \dfrac{|\overrightarrow{DP}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} p_1-d_1 \\ p_2-d_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$= \dfrac{|(p_1-d_1)\cdot a + (p_2-d_2)\cdot b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|ap_1 + bp_2 - ad_1 - bd_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\overset{⊛}{=} \dfrac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

#