

## 3.6 Exercices

Les exercices 3.1 à 3.3 sont des exercices de révision de la première année

### 3.1

Dans une base  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ , de  $V_2$  on considère les vecteurs

$$\vec{a} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Calculer  $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$  et  $\vec{w} = 4\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ .
- $\vec{a}$  et  $\vec{c}$  sont-ils colinéaires?
- $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont-ils colinéaires?
- $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  sont-ils colinéaires?
- Trouver deux nombres réels  $x$  et  $y$  tels que  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ .
- Trouver deux nombres réels  $m$  et  $p$  tels que  $\vec{e}_1 = m\vec{a} + p\vec{b}$ .

### 3.2

Relativement à un repère  $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$  du plan, on considère un parallélogramme  $ABCD$  de centre  $M$ . Calculer les coordonnées des sommets manquants dans les cas suivants.

- $B(3; -3), C(1; 2)$  et  $M(1; 0)$ .
- $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $C(1; -2)$ .
- $A(7; 0), \vec{AD} = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $M(-1; 1)$ .
- $B(-7; 3), M(-2; -1)$  et  $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$ .

### 3.3

Relativement à un repère  $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$  du plan, on donne les points  $A(3; -5), B(-2; 1)$  et  $C(k; 7)$  où  $k$  est un paramètre réel.

- Trouver la valeur de  $k$  de sorte que les points  $A, B$  et  $C$  soient alignés.
- Calculer le nombre réel  $\lambda$  tel que  $\vec{AC} = \lambda\vec{BC}$ .
- Calculer les coordonnées du point  $P$  tel que  $\vec{PA} = 3\vec{PB}$ .

**3.4**

On donne une droite  $d$  par l'équation paramétrique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Calculer les coordonnées et représenter les points de  $d$  correspondants aux valeurs suivantes du paramètre  $k$  :  $-2, -1, 0, 1$  et  $2$ .
- Les points  $A(-11; 11), B(15; -7)$  et  $C(31; -17)$  appartiennent-ils à la droite  $d$  ?

**3.5**

On donne une droite  $d$  par l'équation paramétrique :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer sur la droite  $d$  les coordonnées du point

- $A$  situé sur le premier axe de coordonnées,
- $B$  situé sur le deuxième axe de coordonnées,
- $C$  qui a une abscisse égale à  $7$ ,
- $D$  qui a une ordonnée égale à  $-2$ ,
- $E$  qui a les deux coordonnées égales.

**3.6**

Soit la droite  $d$  d'équation cartésienne  $5x - 2y - 11 = 0$ .

- Déterminer les coordonnées de deux points à coordonnées entières de la droite  $d$  et représenter cette droite.
- Les points  $D(-3; -13), E\left(\frac{1}{2}; -\frac{17}{4}\right)$  et  $F\left(\frac{4}{3}; -2\right)$  appartiennent-ils à la droite  $d$  ?
- Etablir des équations paramétriques de la droite  $d$ .

**3.7**

On donne une droite  $d$  par l'équation cartésienne  $2x + 5y - 20 = 0$ . Déterminer sur la droite  $d$  les coordonnées du point

- $A$  situé sur le premier axe de coordonnées,
- $B$  situé sur le deuxième axe de coordonnées,
- $C$  qui a une ordonnée égale à  $15$ ,
- $D$  qui a une abscisse égale à  $3$ ,
- $E$  qui a les deux coordonnées égales,
- $F$  qui est situé sur la droite d'équation  $3x - 2y - 11 = 0$ .

**3.8**

Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite donnée par :

- a) Un point  $A(-5; 4)$  et un vecteur directeur  $\vec{v} = -3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ .
- b) Un point  $A(3; -7)$  et la pente  $m = -\frac{1}{5}$ .
- c) Les deux points  $A(7; 2)$  et  $B(-5; 8)$ .
- d) Un point  $A(-2; 5)$  et qui est parallèle à la droite  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
- e) Un point  $A(2; -3)$  et qui est parallèle à la droite  $2x - 3y - 5 = 0$ .
- f) Un point  $A(3; 1)$  et qui est parallèle au deuxième axe de coordonnées.

**3.9**

Relativement à un repère du plan, on donne les points  $A(2; 4)$ ,  $B(5; 6)$  et  $P(10; 6)$ , ainsi que les droites (b)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$  et (c)  $2x + y - 10 = 0$ .

- a) Déterminer une équation paramétrique de la droite  $a$  passant par  $A$  et  $B$ .
- b) Déterminer une équation cartésienne de la droite  $a$ .
- c) Déterminer une équation cartésienne de la droite  $b$ .
- d) Déterminer une équation paramétrique de la droite  $c$ .
- e) Calculer les coordonnées du point  $I$  d'intersection des droites  $b$  et  $c$ .
- f) Le point  $P$  appartient-il à la droite  $b$ ? Justifier.
- g) Calculer les coordonnées du point  $C$  d'abscisse 6 de la droite  $c$ .
- h) Montrer que les droites  $a$  et  $b$  sont parallèles.

**3.10**

Déterminer la position relative des droites  $a$  et  $b$  données ci-dessous. Si les droites se coupent, calculer les coordonnées du point d'intersection.

- a) (a)  $4x - 6y - 3 = 0$  et (b)  $-2x + 3y - 5 = 0$
- b) (a)  $x + 3y = 11$  et (b)  $\begin{cases} x = 8 - 3m \\ y = 1 + m \end{cases}$
- c) (a)  $4x - 3y - 6 = 0$  et (b)  $6x + y - 20 = 0$
- d) (a)  $\begin{cases} x = 5 + 3k \\ y = 8 + 2k \end{cases}$  et (b)  $\begin{cases} x = -2 - 6m \\ y = 8 + 4m \end{cases}$

**3.11**

- a) Ecrire l'équation cartésienne d'une droite  $d$  de pente  $m$  qui passe par le point  $A(2; 5)$ .
- b) Déterminer ensuite la valeur de  $m$  de telle sorte que la droite  $d$  :
  - i) passe par le point  $B(8; -2)$ ;
  - ii) coupe le premier axe de coordonnées en  $C(5; 0)$ ;
  - iii) possède  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$  comme vecteur directeur.

**3.12**

Les supports des côtés d'un triangle  $ABC$  sont les droites d'équations :

$$(AB) \ 3x + y - 11 = 0 \quad / \quad (AC) \ \begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + k \end{cases} \quad / \quad (BC) \ 3x + 2y - 13 = 0$$

- Calculer les coordonnées des sommets  $A, B$  et  $C$  du triangle  $ABC$ .
- Calculer les coordonnées des points  $M$  et  $N$  milieux respectifs des côtés  $AB$  et  $AC$ .
- Déterminer une équation cartésienne de la droite  $MN$  ; est-elle parallèle au côté  $BC$  ?

**3.13**

Relativement à un repère du plan, on considère les points

$$A(10; 3), B(13; 9) \text{ et } C(1; 3)$$

ainsi que les droites

$$(p) \ x - 2y - 4 = 0 \text{ et } (q) \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Représenter graphiquement les points  $A, B, C$  et les droites  $p$  et  $q$ .
- Montrer que le point  $A$  est sur la droite  $p$  et le point  $C$  est sur la droite  $q$ .
- On considère le quadrilatère  $ABCD$  où  $D$  est le point d'intersection des droites  $p$  et  $q$ . Calculer les coordonnées de  $D$  et montrer que le quadrilatère  $ABCD$  est un trapèze.
- Etablir une équation cartésienne de la médiane du triangle  $ABC$  issue du sommet  $A$ .
- Etablir une équation cartésienne de la droite  $t$ , parallèle et à égale distance de  $(BC)$  et  $p$ .

**3.14**

Un parallélogramme  $ABCD$  est donné par

- son sommet  $A(1; 1)$ ,
- la pente du côté  $AD$  :  $m_{AD} = -\frac{1}{2}$ ,
- une équation paramétrique de la droite  $AB$  :  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,
- une équation cartésienne de la droite  $BD$  :  $2x - y - 10 = 0$ .

- Représenter graphiquement le parallélogramme  $ABCD$ .
- Déterminer une équation cartésienne de la droite  $AD$ .
- Calculer les coordonnées des sommets  $B, C$  et  $D$  du parallélogramme  $ABCD$ .

## 3.7 Réponses

### 3.1

a)  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \end{pmatrix};$

b)  $\vec{a}$  et  $\vec{c}$  non colinéaires;

c)  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  non colinéaires;

d)  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  non colinéaires;

e)  $x = -\frac{10}{7}, y = \frac{1}{7};$

f)  $m = \frac{4}{7}, p = \frac{1}{7}$

### 3.2

a)  $A(1; -2), D(-1; 3)$

b)  $A(-3; 3), B(-1, -2), D(-1; 3)$

c)  $B(0; 3), C(-9; 2), D(-2; -1)$

d)  $A(1; 3), C(-5; -5); D(3; -5)$

### 3.3

a)  $k = -7$

b)  $\lambda = 2$

c)  $P\left(-\frac{9}{2}; 4\right).$

### 3.4

a)  $M_{-2}(-5; 7), M_{-1}(-2; 5), M_0(1; 3), M_1(4; 1), M_2(7; -1)$

b) oui,  $k = -4$  / non / oui,  $k = 10$

### 3.5

a)  $A(4.5; 0)$

b)  $B(0; 9)$

c)  $C(7; -5)$

d)  $D(5.5; -2)$

e)  $E(3; 3).$

### 3.6

a) par exemple  $A(1; -3), B(3; 2).$

b) oui, oui, non

c) par exemple  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

### 3.7

a)  $A(10; 0)$

c)  $C(-27.5; 15)$

e)  $E\left(\frac{20}{7}; \frac{20}{7}\right)$

b)  $B(0; 4)$

d)  $D(3; 2.8)$

f)  $F(5; 2).$

**3.8**

a)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, x + 3y - 7 = 0$

b)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, x + 5y + 32 = 0$

c)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, x + 2y - 11 = 0$

d)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, 3x + 2y - 4 = 0$

e)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, 2x - 3y - 13 = 0$

f)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x - 3 = 0$

**3.9**

a)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix};$

e)  $I(4; 2)$

b)  $2x - 3y + 8 = 0;$

f) oui

c)  $2x - 3y - 2 = 0;$

g)  $C(6; -2)$

d)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix};$

h) Même pente  $m = \frac{2}{3}$

**3.10**

a)  $a \parallel b$

b)  $a \equiv b$

c)  $I(3; 2)$

d)  $I\left(\frac{3}{2}; \frac{17}{3}\right)$

**3.11**

a)  $y = mx + 5 - 2m$

b) i)  $m = -\frac{7}{6}$

ii)  $m = -\frac{5}{3}$

iii)  $m = \frac{5}{3}$

**3.12**

a)  $A(4; -1), B(3; 2), C(7; -4)$

b)  $M\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{11}{2}; -\frac{5}{2}\right)$

c)  $(MN) 6x + 4y - 23 = 0$ .  $MN$  est parallèle à  $BC$ .

**3.13**

c)  $D\left(\frac{32}{5}; \frac{6}{5}\right)$

d)  $x + y = 13$

e)  $2x - 4y + 1 = 0$

**3.14**

b)  $x + 2y - 3 = 0$ .

c)  $B(7; 4), C\left(\frac{53}{5}; \frac{11}{5}\right), D\left(\frac{23}{5}; -\frac{4}{5}\right)$