5.6 Equations cartésiennes d'une droite dans l'espace

En éliminant le paramètre k dans des équations paramétriques de la droite d, on obtient un système d'équations cartésiennes, appelé équations cartésiennes de la droite d.

Définition 5.3 (*Equations cartésiennes d'une droite*)

Relativement à un repère du plan, on considère la droite d passant par le point

$$A(a_1; a_2; a_3) \text{ et de vecteur directeur } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

*Un **système de deux équations cartésiennes** de d peut être obtenu par élimination du paramètre k dans le système*

$$\begin{cases} x = a_1 + k \cdot v_1 \\ y = a_2 + k \cdot v_2 \\ z = a_3 + k \cdot v_3 \end{cases}$$

Exemple 5.7.

Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par le point $A(3; 2; 5)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\frac{x-3}{2} = y-2 = \frac{z-5}{4} \iff \begin{cases} \frac{x-3}{2} = y-2 \\ y-2 = \frac{z-5}{4} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-3 = 2y-4 \\ 4y-8 = z-5 \end{cases} \iff \begin{cases} x-2y = -1 \\ 4y-z = 3 \end{cases}$$

il s'agit d'une $\cap$ de 2 plans !

Remarque 5.4.

a) Les **équations cartésiennes d'une droite** forment un système comportant deux équations cartésiennes, chacune représentant un plan.
Une droite apparaît donc bel et bien comme étant l'intersection de deux plans.

b) Il ne faut pas déduire des équations paramétriques d'une droite de l'espace une seule équation cartésienne qui définirait un plan contenant la droite d, mais pas la droite d.

c) Tout système formé des équations cartésiennes de deux plans non parallèles ou confondus forme des équations cartésiennes de la droite d'intersection des deux plans.

Exemple 5.8.

Déterminer des équations paramétriques de la droite d définie par le système

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

($\cap$ de deux plans)

2 équ. à 3 inc. (1 inc. de plus, on introduit un paramètre k)

$$\begin{cases} x = k \\ 2y - 3z = 5 - k & \cdot 1 \\ -y + z = 3 - 2k & \cdot 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = k \\ -y = 14 - 7k \\ z = y + 3 - 2k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = k \\ y = -14 + 7k \\ z = -14 + 7k + 3 - 2k = -11 + 5k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

droite passant par $\begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ -11 \end{pmatrix}$ et de vect. directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

Remarque 5.5.

Dans un repère orthonormé, si une droite d est donnée par le système

$$(d) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

alors le vecteur

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

est un vecteur directeur de d.

Si $d = \alpha \cap \beta$ alors $\vec{d} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$ est un vect. direct. de de d.

(dessin $\longrightarrow$)

Exemple 5.9.

Déterminer un vecteur directeur, puis des équations paramétriques de la droite d définie dans un repère orthonormé par le système

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad n_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ -6-1 \\ -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

pour trouver un point : si $x = 0$:

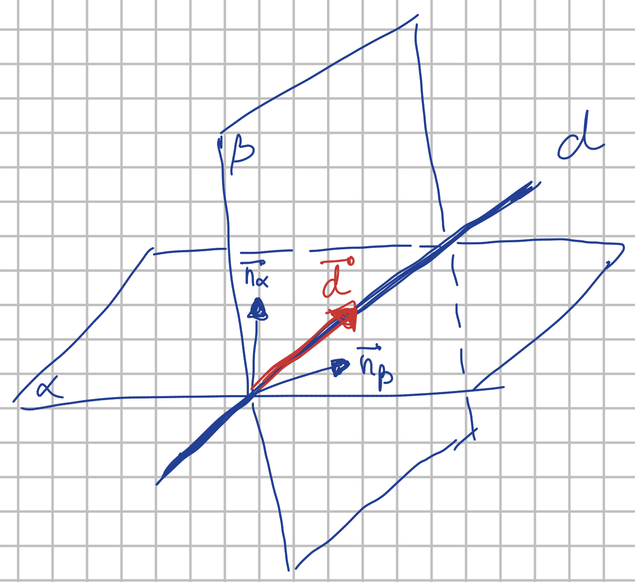
$$\begin{cases} 2y - 3z = 5 \\ -y + z = 3 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot 3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -y = 14 \\ -z = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -14 \\ z = -11 \end{cases}$$

$\Rightarrow d$ passe par $\begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ -11 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ -11 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

ou

$$d : \begin{cases} x = k \\ y = -14 + 7k \\ z = -11 + 5k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$


β
d
$\vec{n}_\alpha$
$\vec{d}$
$\vec{n}_\beta$
α