5.7.2 Position relative de deux plans

On considère les plans $\alpha = (A; \overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2})$ et $\beta = (B; \overrightarrow{b_1}; \overrightarrow{b_2})$.

On note $\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{a_1} \wedge \overrightarrow{a_2}$ et $\overrightarrow{n_\beta} = \overrightarrow{b_1} \wedge \overrightarrow{b_2}$ des vecteurs normaux aux plans α et β.

- $\overrightarrow{n_\alpha}$ et $\overrightarrow{n_\beta}$ colinéaires $\iff \begin{cases} \alpha \equiv \beta & \text{confondus si } A \in \beta \\ \text{ou} & \text{ou} \\ \alpha \parallel \beta & \text{parallèles si } A \notin \beta \end{cases}$

  Pour trancher, il suffit de vérifier si A est (ou n'est pas) un point de β

- $\overrightarrow{n_\alpha}$ et $\overrightarrow{n_\beta}$ non colinéaires $\iff$ α et β sont sécants   l'intersection est une droite !

Exemple 5.11. en exercice

On donne les plans α, β et γ :

$$(\alpha) \quad 5x + 11y - z - 11 = 0 \qquad (\beta) \quad x - y + 3z + 1 = 0$$

$$(\gamma) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Démontrer que α et β se coupent suivant une droite i. Donner un système d'équations paramétriques de i.

1) $\vec{n_\alpha} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} \not\parallel \vec{n_\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ car $\nexists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\vec{n_\beta} = \lambda \vec{n_\alpha}$

ou car $\vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33-1 \\ -1-15 \\ -5-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ -16 \\ -16 \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{= \vec{d}} \neq \vec{0}$

2) 1e méthode $\begin{cases} 5x + 11y - z = 11 \\ x - y + 3z = -1 \end{cases}$ 2 éq. 3 inc. $\Rightarrow \begin{cases} x = k \\ 11y - z = 11 - 5k & \cdot 3 \; \cdot 1 \\ -y + 3z = -1 - k & \cdot 1 \; \cdot 11 \end{cases} \iff \begin{cases} x = k \\ 32y = 32 - 16k \\ 32z = -16k \end{cases}$

$\begin{cases} x = k \\ y = 1 - \frac{1}{2}k \\ z = -\frac{1}{2}k \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$ ou $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad m \in \mathbb{R}$

passe par $(0; 1; 0)$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2e méthode $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta}$ et passe par : si $x = 0$ par exple : $\begin{cases} 11y - z = 11 \\ -y + 3z = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow \dots \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (0; 1; 0)$ $\Rightarrow \dots$

b) Démontrer que $\alpha \parallel \gamma$.

$\alpha : 5x + 11y - z - 11 = 0 \qquad \gamma : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$* \quad \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \vec{n}_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-6 \\ -18-4 \\ -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -22 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{matrix}$

car $\vec{n}_\gamma = 2\vec{n}_\alpha$ ou car $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\gamma = \vec{0}$

$* \quad (2;3;0) \notin \alpha$ car $5 \cdot 2 + 11 \cdot 3 - 11 = 32 \neq 0$

c) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $j = \beta \cap \gamma$ et vérifier que j est parallèle à la droite i.

$\beta : x - y + 3z + 1 = 0$ et $\gamma : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

par substitution γ dans β : $(2+s+3t) - (3-s-t) + 3(-6s+4t) + 1 = 0$

$-16s + 16t = 0 \iff s - t = 0$

1 équ. 2 inc. $\Rightarrow \begin{cases} s = k \\ t = k \end{cases} \Rightarrow j : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$

ou $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \ell \in \mathbb{R}$