Norme et produit scalaire

On appelle ***norme*** *de $\vec{a}$ la longueur d'une flèche représentant ce vecteur et on note $\| \vec{a} \|$.*

Dans une ***base orthonormée****,* $\| \vec{a} \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ *avec* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

On définit aussi, dans une base orthonormée, le ***produit scalaire*** $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Propriété : $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

a) Calculer la norme des vecteurs $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\left\| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ et $\left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

b) On donne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{a} \cdot \vec{b}$ et $\vec{b} \cdot \vec{c}$. Que peut-on conclure ?

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -12 + 2 = -10$ et $\vec{b} \cdot \vec{c} = -20 + 20 = 0$

$\Rightarrow \vec{a} \not\perp \vec{b}$ et $\vec{b} \perp \vec{c}$

Le produit scalaire peut aussi être défini sous forme trigonométrique :
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \| \vec{a} \| \cdot \| \vec{b} \| \cdot \cos(\varphi)$ ou φ est l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$. avec $\varphi \in [0; 180°]$

c) Quel est la valeur de l'angle formé par les vecteurs $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$?

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = -8 + 18 = 10 \\ \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{16+9} = 5 \\ \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{10}{5 \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi \cong 71{,}57°$$

$$\left(\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right)$$