Chapitre 5

Géométrie

5.1 Le cercle

5.1. 1. Indiquer, parmi les équations données ci-dessous, celles qui définissent un cercle. Déterminer alors les coordonnées du centre et le rayon du cercle :

a) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$

b) $(x+2)^2+y^2=64$

c) $(x-5)^2+(y+2)^2=0$

d) $x^2+(y-5)^2=5$

e) $x^2+y^2-2x+4y=20$

f) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$

g) $x^2+y^2+4x-2y+5=0$

h) $x^2+y^2+x=0$

i) $x^2+y^2+6x-4y+14=0$

j) $x^2+y^2+y=0$

k) $80x^2+80y^2-120x+80y+17=0$

l) $144x^2+144y^2-216x+192y=-145$

5.1. 2. Déterminer l'équation des cercles définis par les conditions suivantes :

a) Le centre est l'origine et le rayon est égal à 3.

b) Le centre est $C(2;-3)$ et le rayon est égal à 7.

c) Le cercle passe par l'origine et son centre est $C(6;-8)$.

d) Le cercle passe par $A(2;6)$ et son centre est $C(-1;2)$.

e) Les points $A(3;2)$ et $B(-1;6)$ sont les extrémités d'un diamètre.

f) Le centre est l'origine et le cercle est tangent à $d: 3\,x-4\,y+20=0$.

g) Le centre est $C(1;-1)$ et le cercle est tangent à $d: 5\,x+9=12\,y$.

h) Le cercle passe par $A(3;1)$ et par $B(-1;3)$ et son centre est sur $d : 3\,x = y + 2$.

i) Le cercle passe par $A(1;1)$, par $B(1;-1)$ et par $C(2;0)$.

5.1. 3. Déterminer la position relative des deux objets suivants :

a) la droite $y = 2x - 3$ et le cercle $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3$;

b) la droite $x - 2y - 1 = 0$ et le cercle $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$;

c) la droite $y = x + 10$ et le cercle $x^2 + y^2 = 1$.

5.1. 4. Déterminer la position relative des cercles

$$\gamma_1 : x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_2 : x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$$

5.1. 5. Déterminer l'équation du diamètre du cercle $x^2 + y^2 + 4\,x - 6\,y = 17$ qui est perpendiculaire à la droite $5\,x + 2y = 13$.

5.1. 6. Calculer la plus courte distance d'un point du cercle $x^2 + y^2 - 26\,x + 30\,y = -313$ au point $B(3;9)$.

5.1. 7. Déterminer l'équation du diamètre du cercle $\gamma : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ qui passe par le point milieu de la corde de support $d : 2\,x + y = 13$.

5.1. 8. Calculer la longueur de la corde commune aux cercles $\gamma_1 : x^2 + y^2 = 10\,x + 10\,y$ et $\gamma_2 : x^2 + y^2 + 6\,x + 2\,y = 40$.

5.1. 9. Déterminer les équations des cercles qui ont leur centre sur la droite $4\,x - 5\,y = 3$ et qui sont tangents aux deux droites $2\,x = 3\,y + 10$ et $2\,y = 3\,x + 5$.

5.1. 10. Déterminer l'équation du cercle qui, ayant son centre sur la droite $2\,x + y = 0$, est tangent aux droites $3\,y = 4\,x + 10$ et $4\,x = 3\,y + 30$.

5.1. 11. Déterminer les équations des cercles de rayon $\sqrt{5}$ qui sont tangents à la droite $x - 2\,y = \ 1$ au point $T(3;?)$.

5.1. 12. Déterminer les équations des cercles tangents aux droites

$$y = 7\,x - 5 \quad \text{et} \quad x + y + 13 = 0$$

l'un des points de contact étant $T(1;2)$.

5.1. 13. Déterminer les équations des cercles passant par l'origine et qui sont tangents aux droites $x + 2\,y = 9$ et $y = 2\,x + 2$.

5.1. 14. Déterminer les équations des cercles tangents aux trois droites $3\,y = 4\,x - 10$, $3\,x = 4\,y + 5$ et $3\,x - 4\,y = 15$.

5.1. 15. Déterminer l'équation du symétrique du cercle $x^2 + y^2 - 2\,x - 4\,y + 4 = 0$ relativement à la droite $x = y + 3$.

5.1. 16. Après avoir vérifié que le point T est sur le cercle γ, déterminer les équations des tangentes à γ au point T dans les cas suivants :

a) $T(-1;2)$ et $\gamma : x^2 + y^2 = 5$;

b) $T(-5;7)$ et $\gamma : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$;

c) $T(0;0)$ et $\gamma : x^2 + y^2 = 3x - 7y$;

d) $T(-1;2)$ et $\gamma : x^2 + y^2 - 2x + 6y = 19$;

e) $T(2;3)$ et $\gamma : 2x^2 + 2y^2 = x + 4y + 12$;

f) $T(2;1)$ et $\gamma : 3x^2 + 3y^2 = 2x + 11$.

5.1. 17. Calculer la valeur de l'angle [1] aigu formé par la droite $3\,x - y = 1$ et le cercle $(x - 2)^2 + y^2 = 5$.

5.1. 18. Calculer l'angle [2] sous lequel se coupent les cercles $(x - 3)^2 + (y-1)^2 = 8$ et $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 2$.

5.1. 19. Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 + 10\,x = 2\,y - 6$, de direction donnée par la droite $2\,x + y = 7$.

1. L'*angle d'une droite et d'un cercle* est l'angle formé par la droite et la tangente au cercle en l'un des points d'intersection
2. L'*angle de deux cercles* est l'angle formé par les tangentes aux cercles en l'un des points d'intersection

5.1. 20. Former les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2\,x + 4\,y = 0$, qui sont perpendiculaires à la droite $x = 2\,y + 345$.

5.1. 21. Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 19 - 2\,x$ issues du point $A(1;6)$, ainsi que les coordonnées du point de contact.

5.1. 22. Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2\,x + 4\,y = 20$ issues du point $A(6;5)$, ainsi que les coordonnées des deux points de contact.

5.1. 23. On mène par le point $A(4;2)$ les tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 10$. Calculer l'angle entre ces tangentes.

5.1. 24. On mène par le point $A(4;-4)$ les tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 6\,x - 2\,y - 5$. Calculer la longueur de la corde passant par les points de tangence.

5.2 La sphère

5.2. 1. Indiquer, parmi les équations données ci-dessous, celles qui définissent une sphère. Déterminer alors les coordonnées du centre et le rayon de la sphère :

a) $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y + 6z + 56 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x = 14y + 8z - 69$

d) $36x^2 + 36y^2 + 36z^2 - 108x + 96y + 109 = 144z$

5.2. 2. Déterminer l'équation des sphères définies par les conditions suivantes :

a) Le centre est $C(0;2;-4)$ et le rayon est égal à 5.

b) Le centre est $C(1;-2;4)$ et elle passe par le point $P(3;2;-1)$.

c) L'un de ses diamètres est $[AB]$, où $A(-1;0;5)$ et $B(7;4;-7)$.

d) Elle passe par les points $A(4;2;-3)$ et $B(-1;3;1)$, et a son centre sur la droite $d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

e) Elle est centrée à l'origine et tangente à la droite d'équation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

f) Le centre est $C(4;1;-5)$ et elle est tangente au plan d'équation $x+2y+2z=4$.

g) Elle passe par les points $M(0;3;-4)$, $N(2;2;-3)$ et $P(10;1;-8)$, et son rayon vaut $5\sqrt{2}$.

h) Elle passe par les points $R(-2;2;3)$, $S(0;4;1)$ et $T(-5;5;-1)$, et a son centre sur le plan d'équation $x+3y=2z+7$.

i) Elle passe par les quatre points $E(5;7;-2)$, $F(3;1;0)$, $G(-5;12;3)$ et $H(-3;-2;-1)$.

j) Elle passe par les points $M(8;8;9)$, $N(-1;-1;9)$ et $P(11;5;9)$, et est tangente au sol.

5.2. 3. Déterminer la position relative de la sphère $\Sigma : (x-3)^2+(y-5)^2+(z-10)^2=25$ et de la droite $d : \dfrac{x-7}{6}=\dfrac{y+4}{-6}=z-5$.

5.2. 4. Le système d'équations $\begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100\\ 2x-2y-z+9=0\end{cases}$ détermine-t-il un cercle ? Si oui, calculer les coordonnées du centre C et le rayon r de ce cercle.

5.2. 5. Montrer que les deux sphères d'équations :

$$x^2+y^2+z^2=81 \qquad \text{et} \qquad x^2+y^2+z^2-4x-12y+6z+45=0$$

sont tangentes intérieurement et déterminer l'équation cartésienne de leur plan tangent commun.

5.2. 6. On donne la sphère Σ et le point T. Après avoir vérifie que T appartient à Σ , trouver l'équation cartésienne du plan tangent à Σ au point T :

a) $\Sigma : (x+3)^2+(y-15)^2+(z-2)^2=225$ $\quad T(7;4;4)$,

b) $\Sigma : (x-2)^2+(y+4)^2+(z-3)^2=289$ $\quad T(14;4;-6)$,

c) $\Sigma : x^2+y^2+z^2-2x-10y+6z=27$ $\quad T(-2;12;-5)$,

d) $\Sigma : 49x^2+49y^2+49z^2+42y+34=70x+294z$ $\quad T\left(3;-1;\dfrac{8}{7}\right)$.

5.2. 7. On donne la sphère $\Sigma : x^2+y^2+z^2=216$, ainsi que la droite

$$d : \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 7\\ -2\\ -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \text{ avec } k\in\mathbb{R}$$

Déterminer les équations cartésiennes des plans perpendiculaires à d et tangents à Σ, ainsi que les coordonnées des points de contact de ces plans avec Σ.

5.2. 8. On donne la sphère Σ et le plan α :

$$\Sigma : (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 169 \qquad \alpha : 12x + 4y + 3z - 12 = 0$$

Déterminer les équations cartésiennes des plans parallèles à α et tangents à Σ, ainsi que les coordonnées des points de contact de ces plans avec Σ.

5.2. 9. Un rayon lumineux issu de $A(5;1;2)$ est réfléchi d'abord sur le plan α d'équation $3x + y + 4z + 2 = 0$, le point d'incidence étant $R(1;3;?)$, puis sur la sphère de centre $M(6;13;6)$ et de rayon $\sqrt{24}$.

a) Déterminer les équations paramétriques des deux rayons réfléchis.

b) Déterminer la distance entre le rayon incident et le deuxième rayon réfléchi.

5.2. 10. On donne les points $A(2;9;6)$ et $B(8;1;10)$ ainsi que la droite

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

a) Calculer les coordonnées du centre et le rayon de la sphère passant par A et B et dont le centre est sur d.

b) La sphère coupe-t-elle le plan d'équation $6x + 3y - 2z + 25 = 0$?

c) Quelle est, sur la sphère, la plus courte distance entre A et B ?

d) Déterminer une équation paramétrique d'un axe de rotation laissant la sphère invariante et qui échange les points A et B.

5.2. 11. Un cône de révolution a pour sommet $S(0;0;0)$ et son axe passe par $A(1;1;-1)$. Le cercle de base du cône passe par $Q(0;6;-18)$.

a) Calculer le demi-angle d'ouverture du cône.

b) Calculer la longueur de la hauteur du cône.

c) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère qui est tangente intérieurement au cône en le point Q.

5.2. 12. On donne les plans $\alpha : 8x + y - 4z = 9$ et $\beta : 6x + 3y - 2z = 5$, ainsi que le point $P(2;-3;?)$ de α. Déterminer l'équation des sphères tangentes à α en P et tangentes à β.

5.2. 13. On considère la famille de droites d_k passant par $M(3;3;0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}_k = (2;1;k)$, où k est un paramètre.

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan α contenant d_0 et d_1, et prouver qu'il est perpendiculaire au plan $\pi : z = 0$.
2. Montrer que toutes les droites d_k sont contenues dans α.
3. Déterminer k pour que d_k soit tangente à la sphère Σ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
4. Calculer les coordonnées du centre et le rayon du cercle intersection de Σ et de α.

Solutions

Le cercle

5.1. 1.

a) $C(5;-2) \quad r=5$

b) $C(-2;0) \quad r=8$

c) $C(5;-2) \quad r=0$
Il s'agit d'un point !

d) $C(0;5) \quad r=\sqrt{5}$

e) $C(1;-2) \quad r=5$

f) $\emptyset$

g) $C(-2;1) \quad r=0$
Il s'agit d'un point !

h) $C\left(-\frac{1}{2};0\right) \quad r=\frac{1}{2}$

i) $\emptyset$

j) $C\left(0;-\frac{1}{2}\right) \quad r=\frac{1}{2}$

k) $C\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right) \quad r=\sqrt{0.6}$

l) $C\left(\frac{3}{4};-\frac{2}{3}\right) \quad r=0$
Il s'agit d'un point !

5.1. 2.

a) $x^2+y^2=9$

b) $(x-2)^2+(y+3)^2=49$

c) $(x-6)^2+(y+8)^2=100$

d) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$

e) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$

f) $x^2+y^2=16$

g) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

h) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$

i) $(x-1)^2+y^2=1$

5.1. 3.

a) La droite coupe le cercle.

b) La droite est tangente au cercle.

c) La droite et le cercle sont disjoints.

5.1. 4. Les cercles sont tangents extérieurement.

5.1. 5. $2\,x-5\,y+19=0$

5.1. 6. 17

5.1. 7. $x-2\,y-4=0$

5.1. 8. 10

5.1. 9. $(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{81}{13}$ et $(x+8)^2+(y+7)^2=\frac{25}{13}$

5.1. 10. $(x-1)^2+(y+2)^2=16$

5.1. 11. $(x-4)^2+(y+1)^2=5$ et $(x-2)^2+(y-3)^2=5$

5.1. 12. $(x+6)^2+(y-3)^2=50$ et $(x-29)^2+(y+2)^2=800$

5.1. 13. $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ et $\left(x-\frac{22}{5}\right)^2+\left(y+\frac{31}{5}\right)^2=\frac{289}{5}$

5.1. 14. $\left(x+\frac{10}{7}\right)^2+\left(y+\frac{25}{7}\right)^2=1$ et $\left(x-\frac{30}{7}\right)^2+\left(y-\frac{5}{7}\right)^2=1$

5.1. 15. $(x-5)^2+(y+2)^2=1$

5.1. 16.

a) $x-2\,y+5=0$

b) $3\,x-4\,y+43=0$

c) $3\,x-7\,y=0$

d) $2\,x-5\,y+12=0$

e) $7\,x+8\,y-38=0$

f) $5\,x+3\,y-13=0$

5.1. 17. $45\,^\circ$

5.1. 18. $90\,^\circ$

5.1. 19. $2\,x+y-1=0$ et $2\,x+y+19=0$

5.1. 20. $2\,x+y-5=0$ et $2\,x+y+5=0$

5.1. 21. $2\,x+y-8=0$ et $x-2\,y+11=0$ $T_1(3;2)$ $T_2(-3;4)$

5.1. 22. $x=6$ et $12\,x-35\,y+103=0$ $T_1(6;-2)$ $T_2\left(-\frac{23}{37};\frac{101}{37}\right)$

5.1. 23. $90\,^\circ$

5.1. 24. $\sqrt{10}$

La sphère

5.2. 1. a) $C(2;0;-1)$, $r=3$; b) $\emptyset$; c) $C(-2;7;4)$, $r=0$; d)$C\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{4}{3};2\right)$, $r=\sqrt{5}$.

5.2. 2.
a) $x^2+(y-2)^2+(z+4)^2=25$
b) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=45$
c) $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=56$
d) $(x-4)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=45$
e) $x^2+y^2+z^2=\dfrac{175}{3}$

f) $(x-4)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=\dfrac{64}{9}$
g) $(x-5)^2+(y-6)^2+(z+8)^2=50$, $(x-35/11)^2+(y-6/11)^2+(z+108/11)^2=50$
h) $(x+3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=9$
i) $(x+3)^2+(y-6)^2+(z+2)^2=65$
j) $(x-5)^2+(y-2)^2+(z-7)^2=49$.

5.2. 3. d est extérieur à Σ.

5.2. 4. Oui, on a $C(-1;2;3)$ et $r=8$.

5.2. 5. $2x+6y-3z-63=0$

5.2. 6.
a) $10x-11y+2z-34=0$; b) $12x+8y-9z-254=0$; c) $3x-7y+2z+100=0$;
d) $112x-28y-91z-260=0$.

5.2. 7. $7x-2y-z-108=0$, $7x-2y-z+108=0$, $(14;-4;-2)$, $(-14;4;2)$.

5.2. 8. $12x+4y+3z-209=0$, $12x+4y+3z+129=0$, $(15;5;3)$, $(-9;-3;-3)$.

5.2. 9. a) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\9\\4\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}4\\8\\1\end{pmatrix}$, avec $k,l\in\mathbb{R}$; b) $\dfrac{21}{\sqrt{29}}$.

5.2. 10.
a) $C(5;3;4)$, $r=7$; b) non ; c) $12,29$;
d) l'axe de rotation est $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$ avec $k\in\mathbb{R}$

5.2. 11.
a) $43,09$; b) $8\sqrt{3}$; c) $(x-15)^2+(y-15)^2+(z+15)^2=315$.

5.2. 12.
$(x+6)^2+(y+4)^2+(z-5)^2=81$, $\left(x-\dfrac{138}{61}\right)^2+\left(y+\dfrac{181}{61}\right)^2+\left(z-\dfrac{53}{61}\right)^2=\left(\dfrac{18}{61}\right)^2$.

5.2. 13.
a) $x-2y+3=0$; b) - ; c) $k=2$; d) $\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{6}{5};0\right)$, $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$.