Position relative (droite - cercle)

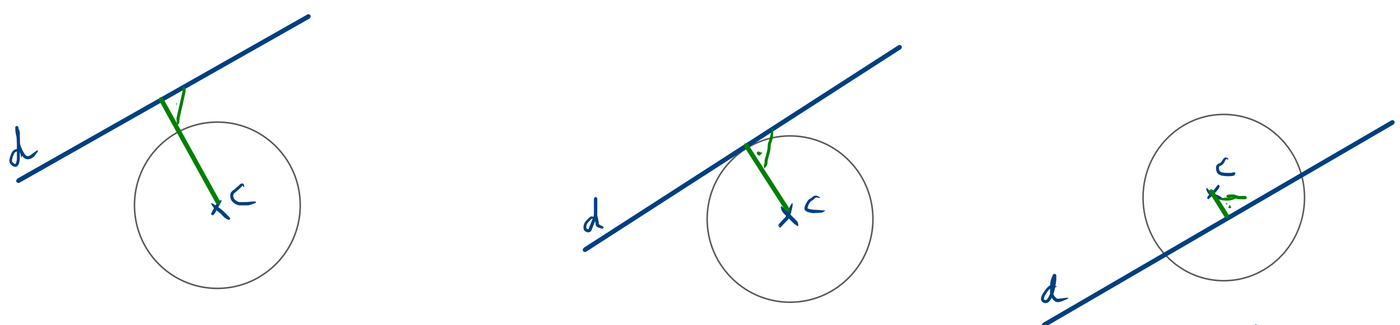
5.1. 3. Déterminer la position relative des deux objets suivants :

a) la droite $y = 2x - 3$ et le cercle $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3$;

b) la droite $x - 2y - 1 = 0$ et le cercle $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$;

c) la droite $y = x + 10$ et le cercle $x^2 + y^2 = 1$.

3 possibilités



disjoints — $\delta(C;d) > r$

tangents — $\delta(C;d) = r$

sécants — $\delta(C;d) < r$

a) $\gamma : \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = 3 + \frac{9}{4} + 1 = \frac{25}{4}$

$C\left(\frac{3}{2} ; -1\right) \qquad r = \frac{5}{2}$

$$\delta(C;d) = \frac{\left|2 \cdot \frac{3}{2} + 1 - 3\right|}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cong 0{,}45 < \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow$ sécants

b) $x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = -12 + 16 + 1$

$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$

$C(4;-1)$ et $r = \sqrt{5}$

$d: x - 2y - 1 = 0$

$\delta(C;d) = \dfrac{|4 - 2\cdot(-1) - 1|}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = r$

$\Rightarrow$ tangents

c) $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow C(0;0)$ et $r = 1$

$d: x - y + 10 = 0$

$\Rightarrow \delta(C;d) = \dfrac{|10|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \cong 7{,}07 > 1$

$\Rightarrow$ disjoints

Pour trouver les points d'intersection :

a) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3 \end{cases}$ par substitution

$$x^2 + (2x-3)^2 - 3x + 2(2x-3) = 3$$

$$x^2 + 4x^2 - 12x + 9 - 3x + 4x - 6 - 3 = 0$$

$$5x^2 - 11x = 0$$

$$x(5x - 11) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 - 3 = -3 \Rightarrow I(0; -3) \\ x = \frac{11}{5} \Rightarrow y = 2 \cdot \frac{11}{5} - 3 = \frac{7}{5} \Rightarrow J\left(\frac{11}{5}; \frac{7}{5}\right) \end{cases}$$