

Racines

Déf : La racine n^e d'un nombre a réel positif est l'unique nombre b réel positif tel que $b^n = a$

$$\left\| \begin{array}{l} \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \\ \text{avec } a, b \in \mathbb{R}_+ \text{ et } n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$$

n est l'indice et a le radicande

Exemples

$$\sqrt{16} = \underline{4} \Leftrightarrow 4^2 = 16$$

(même si $(-4)^2 = 16$, on ne garde que la réponse positive)

$$\sqrt[5]{32} = 2 \Leftrightarrow 2^5 = 32$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

Rem: Si n est un nombre impair, on peut définir $\sqrt[n]{a}$ avec a négatif

$$\sqrt[3]{-125} = -5 \quad \Leftrightarrow \quad (-5)^3 = -125$$

Propriétés

$$1) \quad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$2) \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad b \neq 0$$

$$3) \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$4) \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$5) \quad \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemples :

a) Calculer

$$\sqrt[5]{0,00032} = \sqrt[5]{32 \cdot 10^{-5}} \stackrel{1)}{=} 2 \cdot 10^{-1} = 0,2$$

$$\text{ou } \sqrt[5]{0,00032} = \sqrt[5]{0,2^5} = 0,2$$

b) Simplifier

$$* \sqrt{192} = \sqrt{64 \cdot 3} \stackrel{1)}{=} \sqrt{64} \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

$$* \sqrt{\underbrace{50}_{25 \cdot 2}} - \sqrt{\underbrace{8}_{4 \cdot 2}} = \sqrt{\underbrace{25}_{\uparrow} \cdot 2} - \sqrt{4 \cdot 2} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

↑ carré parfait ↗ on peut "extraire" de la racine

c) Effectuer et réduire

$$* \sqrt{2}(\sqrt{10} + \sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{10} + (\sqrt{2})^2 \stackrel{1)+3)}{=} \underbrace{\sqrt{20}}_{4 \cdot 5} + 2 = 2\sqrt{5} + 2$$

$$\begin{aligned} * (\underbrace{\sqrt{18}}_{9 \cdot 2} + \underbrace{\sqrt{75}}_{25 \cdot 3})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) &= (3\sqrt{2} + 5\sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \\ &= 3\sqrt{2}\sqrt{3} - 3(\sqrt{2})^2 + 5(\sqrt{3})^2 - 5\sqrt{3}\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{6} - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 - 5\sqrt{6} \\ &= -2\sqrt{6} + 9 \end{aligned}$$

ex 4.1.7 / 4.1.8 / 4.1.9 a) b) d)