Problème 1 (21 points)

a) On complète les carrés :

$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2+10-4-9-1=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=4$

On a donc $\boxed{C_1(2;-3;1) \text{ et } r_1=2}$.

b) Méthode 1 : On substitue la droite d dans les plans α et β. $d \cap \alpha$ et $d \cap \beta$

Dans α : $(4+11k)+3(1+7k)-4(3+8k)+5=0 \Leftrightarrow 4+11k+3+21k-12-32k+5=0$

$\Leftrightarrow 0=0$ ok prouve que tous les points de d sont dans α, quelque soit la valeur de k

Dans β : $2(4+11k)-2(1+7k)-(3+8k)-3=0 \Leftrightarrow 8+22k-2-14k-3-8k-3=0$

$\Leftrightarrow 0=0$ ok (idem)

Méthode 2 : Faire l'intersection des deux plans. 2 équations, 3 inconnues $\Rightarrow$ poser un paramètre $z=k$ ou ici $z=\frac{1}{8}k$

$$\begin{cases} x+3y-4z=-5 \\ 2x-2y-z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-6y+8z=10 \\ 2x-2y-z=3 \end{cases} \Leftrightarrow -8y+7z=13$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{7}{8}z-\frac{13}{8} \Leftrightarrow x=-3\left(\frac{7}{8}z-\frac{13}{8}\right)+4z-5=\frac{11}{8}z-\frac{79}{8}$$

z est une variable libre. On pose $8z=k$, donc $y=7k-\frac{13}{8}$ et $x=11k-\frac{79}{8}$. On obtient les équations paramétriques $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -79 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

On vérifie ensuite que le point $(4;1;3)$ appartient à cette droite. C'est le cas avec $k=\frac{3}{8}$.

c) Le vecteur normal de α est $\overrightarrow{n_\alpha}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et le vecteur normal de β est $\overrightarrow{n_\beta}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Les plans sont perpendiculaires si les vecteurs normaux le sont, donc si le produit scalaire vaut 0 :

$$\overrightarrow{n_\alpha}\cdot\overrightarrow{n_\beta}=2-6+4=0$$

d) $P \in \alpha : 2-3-4+5=0$ ok

On cherche une droite p dans le plan α perpendiculaire à d. Comme d est la droite d'intersection des plans α et β et que ces plans sont perpendiculaires, la droite p est perpendiculaire à β. Ainsi, $\overrightarrow{d_p}=\overrightarrow{n_\beta}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. De plus, on sait que p passe par le point P, donc

$$\boxed{e : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix}+l\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ l \in \mathbb{R}}$$

e) Il faut montrer que $\delta(C_1;\beta) = r_1$:

$$\delta(C_1;\beta) = \frac{|2\cdot 2 - 2\cdot(-3) - 1\cdot 1 - 3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2 = r_1$$

f) Comme le rayon de la sphère Σ_2 vaut 2, il reste à trouver le centre C_2. On propose trois méthodes :

Méthode 1 : On commence par chercher le point de tangence T, qui est à l'intersection entre le plan β et la droite p' perpendiculaire au plan passant par C_1. L'équation de la droite p' est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc calculer le point d'intersection

$$2(2+2k)-2(-3-2k)-(1-k)-3 = 0 \Leftrightarrow 4+4k+6+4k-1+k-3 = 0 \Leftrightarrow 9k = -6 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}$$

Le point de tangence est donc $T\left(\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$. Ainsi, on a

$$\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{OC_1} + 2\overrightarrow{C_1T} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -4/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

Méthode 2 : On utilise la formule du symétrique du formulaire : le centre C_2 symétrique de C_1 par rapport à β est donné par $\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OC_1} - 2\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{n_\beta}}{||\overrightarrow{n_\beta}||^2}\cdot\overrightarrow{n_\beta}$ avec A un point du plan β.

Posons par exemple $A(0;0;-3)$. Alors $\overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{n_\beta} = 6$ et $||\overrightarrow{n_\beta}||^2 = 9$ et on a

$$\overrightarrow{OC_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\cdot\frac{6}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8/3 \\ -8/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

Méthode 3 : On normalise le vecteur $\overrightarrow{n_\beta}$: $||\overrightarrow{n_\beta}|| = 3 \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{n_\beta}$ est un vecteur unitaire. Comme $||\overrightarrow{C_1C_2}|| = 4$, on a

$$\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OC_1} \pm 4\vec{u} = \begin{pmatrix} 14/3 \\ -17/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

Il faut ensuite tester lequel vérifie $\delta(C_2;\beta) = 2$. Il s'agit du deuxième.

On a ainsi trouvé $C_2\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$, donc l'équation de la sphère est

$$\boxed{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{7}{3}\right)^2 = 4}$$

g) Méthode 1 : On construit la droite p perpendiculaire au plan passant par C_1 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le centre C_3 se trouve à l'intersection du plan β et de la droite p. Comme $z = 0$, on obtient $1 + m = 0 \Rightarrow m = -1$, donc $\boxed{C_3(2; -3; 0)}$.
Pour déterminer le rayon, on utilise Pythagore dans le triangle C_1C_3P avec P un point sur la sphère et sur le cercle. Comme $\overrightarrow{C_1C_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 - ||\overrightarrow{C_1C_3}||^2} = \sqrt{4-1} = \boxed{\sqrt{3}}$$

Méthode 2 : On se place dans le plan Oxy car $z = 0$ et on travaille en deux dimensions :

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 + 10 - 4 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 3$$

Le centre cherché est donc $\boxed{C_3(2; -3; 0)}$ et le rayon est $\boxed{r_3 = \sqrt{3}}$.