Ex 3.5

f) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 4x - 6}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{x^3 - x^2 - 4x - 6}{(x-3)(x+1)}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R} - \{-1;3\}$

AV/trou :

* $\lim_{x \to -1} f(x) = \dfrac{-1-1+4-6}{0} = \text{"}\dfrac{-4}{0}\text{"} = \infty \Rightarrow$ $x = -1$ est une AV.

* $\lim_{x \to 3} f(x) = \dfrac{27-9-12-6}{0} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ forme indéterminée.

Il faut factoriser $x^3 - x^2 - 4x - 6$.

Comme 3 est un zéro $\Rightarrow$ Horner

	1	−1	−4	−6
3		3	6	6
	1	2	2	0

$\Rightarrow x^3 - x^2 - 4x - 6 = (x-3)\underbrace{(x^2 + 2x + 2)}_{\Delta = -4 < 0}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \dfrac{\cancel{(x-3)}(x^2+2x+2)}{\cancel{(x-3)}(x+1)} = \lim_{x \to 3} \dfrac{x^2+2x+2}{x+1} = \dfrac{17}{4}$

$\Rightarrow \left(3; \frac{17}{4}\right)$ est un "trou"

AH/AO : Il y a une AO car $\underset{3}{\deg(N(x))} \underset{=}{=} \underset{2}{\deg(D(x))} \underset{+1}{+ 1}$

On obtient son équation en effectuant la division :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 4x - 6 & x^2 - 2x - 3 \\ \cline{2-2} -x^3 + 2x^2 + 3x & x + 1 \\ \cline{1-1} x^2 - x - 6 & \\ -x^2 + 2x + 3 & \\ \cline{1-1} x - 3 & \end{array}$$

$y = x + 1$ est une AO

(pas d'AH car AO ou car $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$)