3.4 Exercices

3.1

Calculer les limites suivantes ou expliquer pourquoi elles n'existent pas.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+7}{8+2x-5x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2}{x-x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+2}{x^2+3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(3x+4)(x-1)}{(2x+7)(x+2)}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-x^2}{x^2-32}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-5x-3}{3x^3+7x+9}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-3}{5-3x}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{3x^2-x+2}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4-x^2}{x+2}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{2x^2-5}$

3.2

On verse de l'eau salée, concentrée à 10 grammes de sel par litre d'eau, dans une cuve qui contient 200 litres d'eau pure.

a) Si l'eau salée s'écoule à la vitesse de 20 litres par minute dans la cuve, quel est le volume d'eau $v(t)$ (en litres) ainsi que la quantité de sel $q(t)$ (en grammes) après t minutes ?

b) Quelle est la concentration $c(t)$ en sel (en grammes par litre) après t minutes ?

c) Que devient cette concentration après une longue période de temps ($t \to +\infty$) ?

3.3

On appelle *fonction demande* ou simplement *demande* la quantité d'un bien que les consommateurs sont disposés à acheter en fonction du prix de ce bien. Un manufacturier de lampes a observé que la demande pour son modèle spécial de lampe de bureau obéit à la fonction

$$d(x) = \frac{5x+600}{x} \quad \text{où } x \text{ est le prix de vente de ses lampes.}$$

Que devient cette demande si on fixe un prix de vente extrêmement bas ($x \underset{>}{\to} 0$) ? un prix de vente extrêmement élevé ($x \to +\infty$) ?

3.4

Déterminer l'ensemble de définition et une équation des asymptotes verticales et horizontales éventuelles des fonctions suivantes. S'il existe un trou de continuité en donner les coordonnées.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

b) $f(x) = \dfrac{5x}{4-x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

e) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^3+x^2-6x}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{5x-x^2}$

3.5

Déterminer l'ensemble de définition et une équation des asymptotes des fonctions suivantes. S'il existe un trou de continuité en donner les coordonnées.

a) $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

e) $f(x) = \dfrac{3x^2-4x+2}{x-1}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3-x^2-4x-6}{x^2-2x-3}$

3.6

Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, toutes les asymptotes de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^n+1}{x^2-9}$$

3.7

Trouver dans chacun des cas suivants une fonction rationnelle admettant pour seule(s) asymptote(s) celle(s) qui est proposée(s). Donner la solution la plus simple pour ces fonctions, c'est-à-dire celles pour lesquelles les degrés du numérateur et du dénominateur sont les plus petits possibles. Exprimer les résultat sous la forme d'une seule fraction.

a) Une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 3$

b) Une asymptote horizontale d'équation $y = 2$

c) Une asymptote verticale d'équation $x = 4$

d) Une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et des asymptotes verticales d'équations $x = 1$ et $x = -2$

e) Une asymptote verticale d'équation $x = 2$ et une asymptote oblique d'équation $y = 3x - 1$.

3.8

Trouver une fonction rationnelle f dont le graphe passe par le point $A(-5; 20)$ et qui admet pour asymptotes les droites d'équations $x = -2, x = 1$ et $y = 3x - 7$.

3.9

Etudier la position relative de la courbe $y = f(x)$ et de ses asymptotes, si f est donnée par :

a) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^3-3x^2-x+6}{x^2-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+5}{x^2+2x+3}$

d) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2+5}$

3.5 Réponses

3.1

a) $-\dfrac{3}{5}$

b) -1

c) $+\infty$

d) $\dfrac{3}{2}$

e) -1

f) 0

g) $-\infty$

h) 0

i) $+\infty$

j) $+\infty$

3.2

a) $v(t) = 200 + 20t$ et $q(t) = 200t$

b) $c(t) = \dfrac{10t}{t+10}$

c) Elle s'approche de $10g/l$.

3.3

Dans le premier cas, la demande devient infiniment grande.

Dans le deuxième cas, elle s'approche de 5 lampes.

3.4

a) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}, x = -2, x = 2, y = 0$

b) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}, x = -2, x = 2, y = 0$

c) $ED(f) = \mathbb{R}, y = 2$

d) $ED(f) = \mathbb{R}, y = 0$

e) $ED(f) = \mathbb{R}^* - \{-3, 2\}, x = 0, x = 2, y = 0$; trou de continuité en $(-3; \frac{1}{15})$

f) $\mathbb{R}^* - \{5\}, x = 5, y = -1$; trou de continuité en $(0; -\frac{1}{5})$

3.5

a) $ED(f) = \mathbb{R} - \{2\}, x = 2, y = 2$

b) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}, x = -2, x = 2, y = 0$

c) $ED(f) = \mathbb{R}^*, x = 0, y = x$

d) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-1; 1\}, x = -1, x = 1, y = 0$

e) $ED(f) = \mathbb{R} - \{1\}, x = 1, y = 3x - 1$

f) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-1; 3\}, x = -1, y = x + 1$; trou de continuité en $(3; \frac{17}{4})$