Ex 1.2.26

$$F = \langle \underbrace{(3;2;-2)}_{f_1} ; \underbrace{(7;-3;1)}_{f_2} ; \underbrace{(-11;8;-4)}_{f_3} ; \underbrace{(4;-5;3)}_{f_4} \rangle \subset \mathbb{R}^3$$

f_1, f_2, f_3, f_4 ne sont pas tous libres car F est de dim $\leqslant 3 (= \dim \mathbb{R}^3)$
On cherche alors le ou les vecteurs libres et ceux qui sont liés :

On échelonne et on réduit la matrice formée des 4 vecteurs (en colonne)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -11 & 4 \\ 2 & -3 & 8 & -5 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_3+L_2 \to L_3}{\overset{1/3 L_1 \to L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 7/3 & -11/3 & 4/3 \\ 2 & -3 & 8 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \overset{L_2 - 2L_1 \to L_2}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7/3 & -11/3 & 4/3 \\ 0 & -23/3 & 46/3 & -23/3 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \overset{-\frac{3}{23} L_2 \to L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 7/3 & -11/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_3+2L_2 \to L_3}{\overset{L_1 - 7/3 L_2 \to L_1}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

libres (colonnes 1 et 2) liés (colonnes 3 et 4) $\Rightarrow f_3 = f_1 - 2f_2$ et $f_4 = -f_1 + f_2$

$$\Rightarrow F = \langle f_1 ; f_2 \rangle \Rightarrow \mathcal{B}_F = (f_1 ; f_2) \Rightarrow \dim(F) = 2$$

Ou on "remarque" que $f_2 = f_1 + f_4$ et $f_3 = -f_2 - f_4$

donc f_2 et f_3 ne sont pas libres.

On vérifie que f_1 et f_4 sont libres :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_4 = 0$$

$$\lambda_1 (3;2;-2) + \lambda_2 (4;-5;3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - 5\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 3 \\ 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_2 = 0 \\ -4\lambda_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow F = \langle f_1 ; f_4 \rangle \Rightarrow \mathcal{B}_F = (f_1 ; f_4) \Rightarrow \dim(F) = 2$$