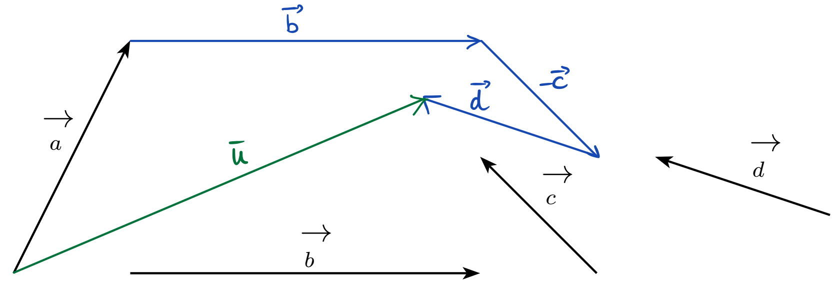
Vecteur

*Un **vecteur** est représenté par une flèche qui définit*

- une direction
- un sens
- une norme

Représenter ci-dessous le vecteur $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$



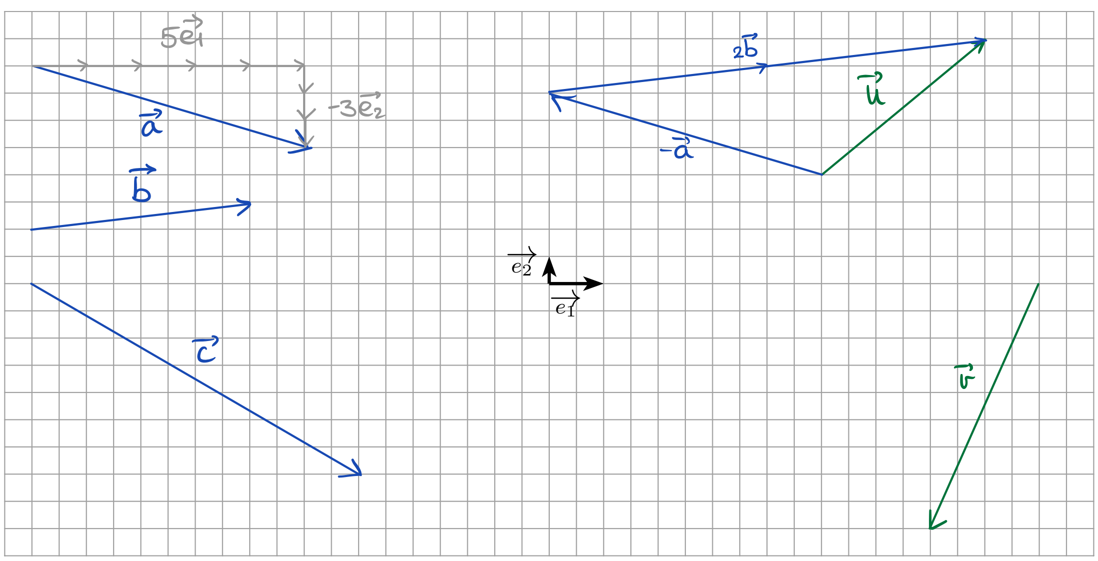
Qu'appelle-t-on deux vecteurs colinéaires ? deux vecteurs qui ont la même direction.

Base

*On munit l'ensemble V_2 des vecteurs du plan d'une **base**, que l'on note $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$ formée d'un couple de vecteurs non colinéaires.*
On peut ainsi exprimer tout vecteur $\vec{a}$ comme combinaison linéaire de $\vec{e_1}$ et de $\vec{e_2}$:
$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ *où a_1 et a_2 sont des nombres réels.*

Relativement à une base on donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$.

a) Représenter ci-dessous ces vecteurs.



b) Calculer les composantes de $\vec{u} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ et de $\vec{v} = 2\vec{c} - 2\vec{a} - \vec{b}$ et les représenter.

$$\vec{u} = -\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+8 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = 2\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-10-4 \\ -14+6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Repère

En associant un point O (origine) à une base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$, on obtient un ***repère*** *du plan noté $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$. On peut alors placer un point d'après ses coordonnées.*
$A(a_1;a_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. *On a alors* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

On donne relativement à un repère les points $A(1;-6)$, $B(-1;3)$ et $C(3;0)$.

a) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-3 \\ -6-0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) Déterminer les coordonnées du milieu M du segment AC. moyenne des coords

$M\left(\frac{1+3}{2} ; \frac{-6+0}{2}\right) = M(2 ; -3)$

c) Déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC. moyenne des coords

$G\left(\frac{1-1+3}{3} ; \frac{-6+3+0}{3}\right) = G(1 ; -1)$

Norme et produit scalaire

On appelle ***norme*** *de $\vec{a}$ la longueur d'une flèche représentant ce vecteur et on note $\| \vec{a} \|$.*
Dans une ***base orthonormée***, $\| \vec{a} \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ *avec* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
On définit aussi, dans une base orthonormée, le ***produit scalaire*** $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Propriété : $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

a) Calculer la norme des vecteurs $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\left\| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ et $\left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

b) On donne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{a} \cdot \vec{b}$ et $\vec{b} \cdot \vec{c}$. Que peut-on conclure ?

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -12 + 2 = -10$ et $\vec{b} \cdot \vec{c} = -20 + 20 = 0$
$\Rightarrow \vec{a} \not\perp \vec{b}$ et $\vec{b} \perp \vec{c}$

Le produit scalaire peut aussi être défini sous forme trigonométrique :
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \| \vec{a} \| \cdot \| \vec{b} \| \cdot \cos(\varphi)$ ou φ est l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$. avec $\varphi \in [0;180°]$

c) Quel est la valeur de l'angle formé par les vecteurs $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$?

$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = -8 + 18 = 10 \\ \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{16+9} = 5 \\ \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{10}{5 \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

$\Leftrightarrow \varphi \cong 71{,}57°$

$\left(\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}\right)$