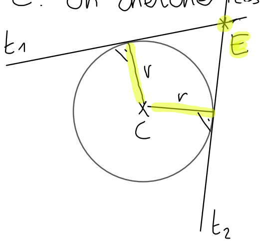
Tgtes au cercle (suite)

3) passant par un point extérieur au cercle

On donne un cercle et un point E. On cherche les tangentes.

On sait que

1. E appartient aux tangentes
2. La distance entre le centre du cercle et les tangentes est égale au rayon



Exemple : $\gamma : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$ et $E(7;1)$

$\Rightarrow C(1;3)$ et $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

On vérifie que E est à l'extérieur du cercle :

$\underbrace{\|\vec{CE}\|}_{\text{distance centre} - E} = \left\|\begin{pmatrix}7-1\\1-3\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} > \sqrt{20} = r$ ✓

On utilise l'équation de la tangente $y = mx + h \Leftrightarrow mx - y + h = 0$ (2 inc. m et h)

1. $\underset{E(7;1)}{E \in t} \Rightarrow t : 7m - 1 + h = 0 \Leftrightarrow h = 1 - 7m$ ⊛

$\Rightarrow t : mx - y + \underbrace{1 - 7m}_{h} = 0$ (1 inc. m.)

2. $\delta(C;t) = r \Leftrightarrow \dfrac{|m \cdot 1 - 3 + 1 - 7m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{20}$ $\quad | \cdot \sqrt{m^2+1}$

$C(1;3)$
$r = \sqrt{20}$

$\Leftrightarrow |-6m-2| = \sqrt{20}\sqrt{m^2+1}$ $\quad | (\ )^2$

$\Leftrightarrow (-6m-2)^2 = 20(m^2+1)$

$\Leftrightarrow 36m^2 + 24m + 4 = 20m^2 + 20$

$\Leftrightarrow 16m^2 + 24m - 16 = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 + 3m - 2 = 0$ $\quad \Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25$

$\Leftrightarrow m_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \overset{⊛}{\Rightarrow} h_1 = 1 - 7 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \\ -2 \overset{⊛}{\Rightarrow} h_2 = 1 - 7 \cdot (-2) = 15 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} t_1 : y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - y - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 5 = 0 \\ t_2 : y = -2x + 15 \Leftrightarrow 2x + y - 15 = 0 \end{cases}$

ou avec

(p.51)

Tangentes à γ par un point extérieur E :

Soit $E(e_1; e_2)$ un point extérieur à γ. L'équation

$$\boxed{e_2 - c_2 = m(e_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2+1}}$$

fournit les pentes des tangentes (non verticales) issues de E.

on gagne un peu de temps avec la formule

On reprend le même exemple : $\begin{cases} C(1;3) \quad r = \sqrt{20} \\ E(7;1) \\ (x-1)^2+(y-3)^2 = 20 \end{cases}$

$$1-3 = m(7-1) \pm \sqrt{20}\sqrt{m^2+1}$$

$$-2 = 6m \pm \sqrt{20}\sqrt{m^2+1}$$

⚠ avant d'élever au carré isoler la racine.

$$-2-6m = \pm\sqrt{20}\sqrt{m^2+1} \quad \Big|\ (\ )^2$$

$$(-2-6m)^2 = 20(m^2+1) \quad \text{(idem)}$$

$\vdots$

$$m_{1,2} = \dots \begin{cases} 1/2 \\ -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ t_1 : $y = \frac{1}{2}x + h$ et $E(7;1) \in t_1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\cdot 7 + h$

$\Leftrightarrow h = -\frac{5}{2}$

t_2 : $y = -2x + h$ et $E(7;1) \in t_2 \Rightarrow 1 = -2\cdot 7 + h$

$\Leftrightarrow h = 15$

$\Rightarrow$ t_1 : $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ . . .