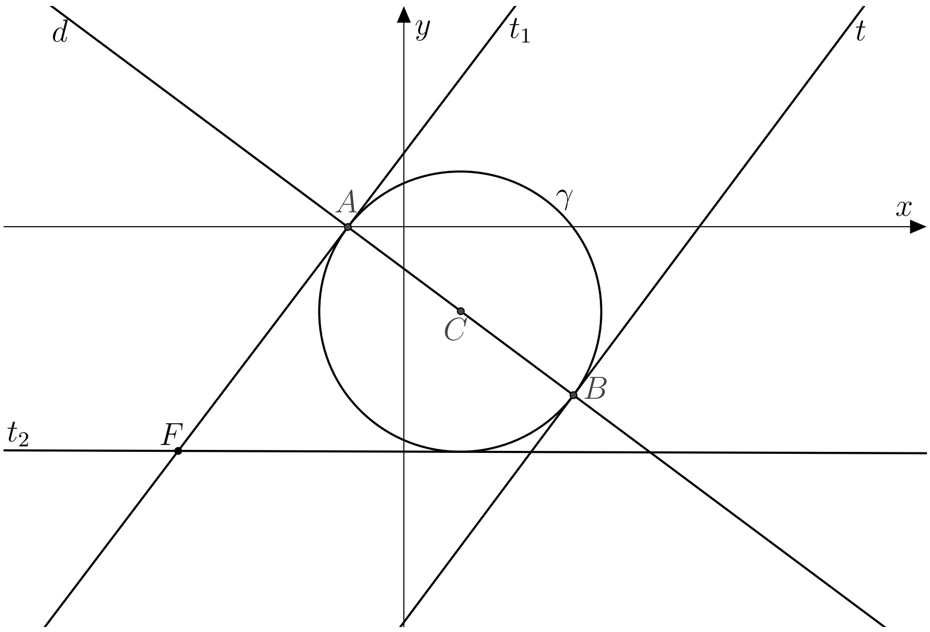
Problème 1 (23 points)

Relativement à un repère orthonormé du plan, on considère tous les éléments suivants (voir la représentation graphique ci-dessous) :

- le cercle γ d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$
- la droite d d'équation $3x + 4y + 6 = 0$
- le point $F(-8; -8)$
- les points A et B intersections de la droite d avec le cercle γ
- la tangente t à γ en B
- les tangentes t_1 et t_2 à γ issues de F.



a) Déterminer les coordonnées du centre C et le rayon r du cercle γ.

b) Prouver que la droite d passe par le centre C du cercle γ.

c) Calculer les coordonnées des intersections A et B de la droite d et du cercle γ. On nommera B le point dont l'abscisse est positive et A l'autre point.

En cas de doute, prendre $A(-2; 0)$ *et* $B(6; -6)$.

d) Déterminer une équation cartésienne de la droite t, tangente à γ en B.

e) Déterminer une équation cartésienne des tangentes t_1 et t_2 au cercle γ issues du point F.

En cas de doute, prendre $(t_1) : 4x - 3y + 8 = 0$ *et* $(t_2) : y + 8 = 0$.

f) Calculer la valeur de l'angle aigu α entre les droites t_1 et t_2.

g) Vérifier que le point A appartient à l'une de ces deux tangentes.

h) Déterminer une équation cartésienne du cercle δ circonscrit au triangle FAC.

Problème 1 (23 points)

a) $(\gamma) : x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 12 + 4 + 9$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$

D'où le centre $\boxed{C(2; -3)}$ et le rayon $\boxed{r = 5}$

b) $\boxed{C \in d}$, en effet : $3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 6 = 0$ ✓

c) $3x + 4y + 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{6}{4}$

Par substitution dans l'équation de γ :

$x^2 + (-\frac{3}{4}x - \frac{6}{4})^2 - 4x + 6(-\frac{3}{4}x - \frac{6}{4}) - 12 = 0$

$x^2 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{36}{16}x + \frac{36}{16} - 4x - \frac{18}{4}x - \frac{36}{4} - 12 = 0$

$25x^2 - 100x - 300 = 0$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x+2)(x-6) = 0 \iff x_1 = -2$ et $x_2 = 6$

$y_1 = -\frac{3}{4} \cdot (-2) - \frac{6}{4} = 0$

$y_2 = -\frac{3}{4} \cdot 6 - \frac{6}{4} = -6$

D'où $\boxed{A(-2; 0)}$ et $\boxed{B(6; -6)}$

$3x + 4y + 6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}y - 2$

Par substitution dans l'équation de γ :

$(-\frac{4}{3}y - 2)^2 + y^2 - 4(-\frac{4}{3}y - 2) + 6y - 12 = 0$

$\frac{16}{9}y^2 + \frac{16}{3}y + 4 + y^2 + \frac{16}{3}y + 8 + 6y - 12 = 0$

$25y^2 + 150y = 0$

$y^2 + 6y = 0$

$y(y + 6) = 0 \iff y_1 = 0$ et $y_2 = -6$

$x_1 = -\frac{4}{3} \cdot 0 - 2 = -2$

$x_2 = -\frac{4}{3} \cdot (-6) - 2 = 6$

D'où $\boxed{A(-2; 0)}$ et $\boxed{B(6; -6)}$

d) $(t) : (6 - 2)(x - 2) + (-6 + 3)(y + 3) = 25$ formule : équation « dédoublée »

$4x - 8 - 3y - 9 - 25 = 0$

$4x - 3y - 42 = 0$

D'où $\boxed{(t) : 4x - 3y - 42 = 0}$ ou bien $\boxed{(t) : y = \frac{4}{3}x - 14}$

e) $(-8 + 3) = m(-8 - 2) \pm 5\sqrt{m^2 + 1}$ avec formule sachant que F est extérieur au cercle

$-5 = -10m \pm 5\sqrt{m^2 + 1}$

$-5 + 10m = \pm 5\sqrt{m^2 + 1}$

$100m^2 - 100m + 25 = 25m^2 + 25$

$75m^2 - 100m = 0$

$25m(3m - 4) = 0 \iff m_1 = \frac{4}{3}$ et $m_2 = 0$

$\Rightarrow (t_1) : y = \frac{4}{3}x + h$

or $F(-8; -8) \in t_1 \Rightarrow -8 = \frac{4}{3} \cdot (-8) + h \Rightarrow h = \frac{8}{3} \Rightarrow (t_1) : y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$

D'où $\boxed{(t_1) : 4x - 3y + 8 = 0}$ et $\boxed{(t_2) : y + 8 = 0}$

f) $m_1 = \dfrac{4}{3}$ et $m_2 = 0$

$\tan(\alpha) = \left|\dfrac{\frac{4}{3} - 0}{1 + 0}\right| = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = \arctan(\frac{4}{3}) \cong \boxed{53{,}13°}$

Variante :

$\overrightarrow{d_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\cos(\alpha) = \dfrac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = \arccos(\frac{3}{5}) \cong \boxed{53{,}13°}$

g) $\boxed{A \in t_1}$, en effet : $4 \cdot (-2) - 3 \cdot 0 + 8 = 0$ ✓

h) Le triangle FAC est rectangle en A car $d \perp t_1$.
D'où le cercle δ n'est autre que le cercle de Thalès du segment FC.
Soit M le milieu de FC : $M(\frac{-8+2}{2}; \frac{-8-3}{2}) = M(-3; -\frac{11}{2})$.
De plus,

$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

$r_\delta = \left\|\overrightarrow{MC}\right\| = \sqrt{5^2 + (\frac{5}{2})^2} = \sqrt{\frac{125}{4}}$

D'où $\boxed{(\delta) : (x+3)^2 + (y + \frac{11}{2})^2 = \frac{125}{4}}$

ou intersection des médiatrices pour trouver le centre:
m(FA): 3x+4y+31=0
m(AC): 8x-6y-9=0
m(FC): 20x+10y+115=0