Problème 6 (24 points)

Relativement à un repère orthonormé du plan, on donne le cercle γ et les droites t et d :

$$(\gamma) : (x-7)^2 + (y-4)^2 = 18$$

$$(t) : x - y - 9 = 0$$

$$(d) : 7x + y + 9 = 0$$

a) Déterminer les coordonnées du centre C et le rayon r du cercle γ.

b) Montrer que la droite t est tangente au cercle γ et déterminer par calcul les coordonnées du point de tangence T.

Note : prendre le point $T(10; 1)$ pour la suite du problème, si vous n'avez pas répondu à la question précédente.

c) Soit s la droite parallèle à t et tangente à γ. Déterminer une équation cartésienne de s et calculer les coordonnées du point S de tangence de s et γ.

d) Déterminer une équation cartésienne de chacune des bissectrices des droites t et d.

e) Déterminer une équation du cercle β tangent aux droites t et d tel que β et γ soient tangents intérieurement en T.

Prob6

a) $C(7;4)$ et $r=\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

b) $\left(\delta(C;t) = \frac{|7-4-9|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} = r \quad \checkmark \right)$ pas utile puisque ici

$\{T\} = t \cap \gamma$:

$$\begin{cases} x-y-9=0 & (1) \\ (x-7)^2+(y-4)^2 = 18 & (2) \end{cases} \Rightarrow x = y+9$$

on substitue dans (2)

$$\Rightarrow (y+9-7)^2+(y-4)^2 = 18$$
$$(y+2)^2+(y-4)^2 = 18$$
$$y^2+4y+4+y^2-8y+16 = 18$$
$$2y^2-4y+2 = 0$$
$$y^2-2y+1 = 0$$
$$(y-1)^2 = 0$$

$y=1 \overset{(1)}{\Rightarrow} x = 1+9 = 10$ $\quad T(10;1)$

1 seul point d'∩ (prouve que c'est tangent)

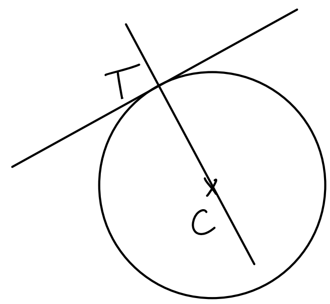
Variante

$$\delta(C;t) = \frac{|7-4-9|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} = r \quad \checkmark$$

← obligatoire pour cette méthode.

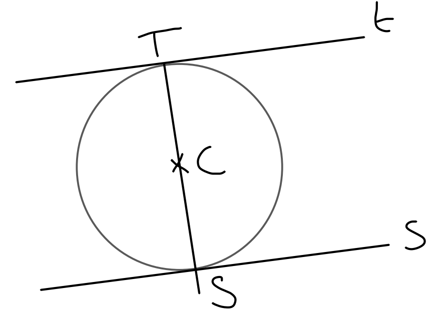
et $\{T\} = t \cap (CT)$

avec
$$\left.\begin{array}{l} (CT) \perp t \Rightarrow x+y+c=0 \\ \text{et } C \in (CT) \Rightarrow 7+4+c=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c=-11 \end{array}\right\} \Rightarrow (CT):\ x+y-11=0$$



$$+\begin{cases} x-y=9 \\ x+y=11 \end{cases}$$

$$2x = 20$$
$$x = 10 \Rightarrow 10-y=9$$
$$\Leftrightarrow y=1 \Rightarrow T(10;1)$$



c) $s \parallel t \Rightarrow s: x - y + c = 0$

$$\delta(C;s) = \sqrt{18} \Leftrightarrow \frac{|7-4+c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{18}$$

$$\Leftrightarrow |3+c| = \sqrt{18}\sqrt{2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\Leftrightarrow 3+c = \pm 6$$

$$\Leftrightarrow c = \begin{cases} 6-3 = 3 \\ -6-3 = -9 \end{cases} \leftarrow \text{drte } t$$

$$\Rightarrow s: x-y+3=0$$

$$\vec{OS} = \vec{OC} + \vec{CS} = \vec{OC} + \vec{TC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7-10 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow S(4;7)$$

<u>ou</u>

$$\vec{TC} = \vec{CS} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 - 7 \\ s_2 - 4 \end{pmatrix} \text{ avec } S(s_1;s_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1 - 7 = -3 \\ s_2 - 4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = 4 \\ s_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow S(4;7)$$

<u>ou</u> $\gamma \cap s$ <u>ou</u> $s \cap (CS)$