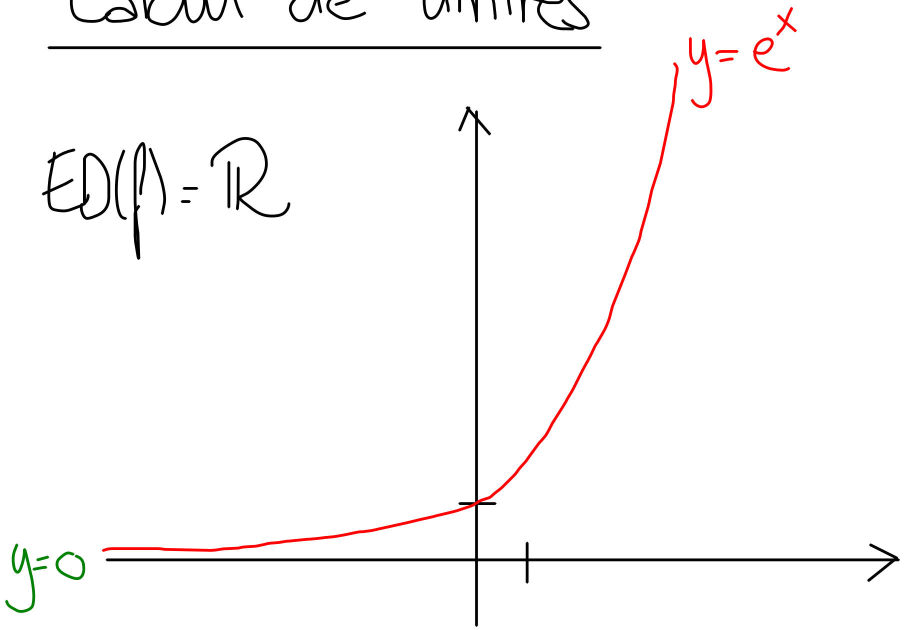
Calcul de limites

$ED(f) = \mathbb{R}$

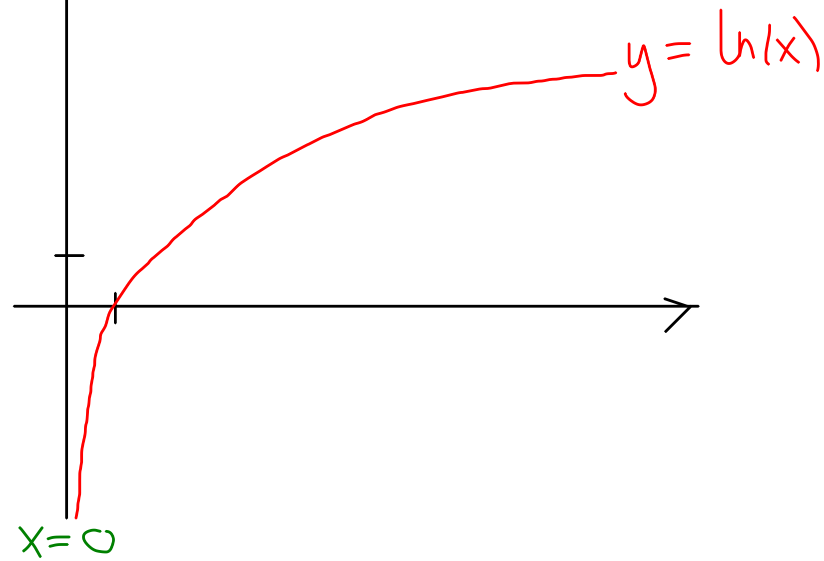


Asymptote : $y = 0$ AHG

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$$

$ED(f) =]0 ; +\infty[$



Asymptote : $x = 0$ AV

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = \boxed{\lim_{x \to 0_+} \ln(x) = -\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty}$$

Calcul de limites : règle de Bernoulli - L'Hospital

Rappel : Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\lim_{x \to 2} f(x) \underset{f.i.}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x \to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+1) = 3 \quad \Rightarrow \text{"trou en } (2;3)\text{"}$$

Calculons $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{e^{x-2} - 1} = \underset{f.i}{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}$ impossible de factoriser et simplifier

On utilise dans ce cas "$\frac{0}{0}$" mais aussi dans le cas "$\frac{\infty}{\infty}$" une méthode qui consiste à dériver le numérateur et le dénominateur <u>séparément</u> puis à calculer cette nouvelle limite :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{e^{x-2} - 1} \left(= \underset{f.i.}{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}} \right) \overset{B.H}{=} \lim_{x \to 2} \frac{2x}{e^{x-2}} = \frac{4}{1} = 4$$

Règle de Bernoulli - L'Hospital

Valable sous les conditions suivantes :

Si
1) f et g sont dérivables au voisinage de a
2) $\displaystyle \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ (ou $= \pm\infty$)
3) g' ne s'annule pas dans le voisinage de a (mais peut s'annuler en a)
4) $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

Alors

form. p.15

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

⚠ $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \neq \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$

Rem :
- La règle reste valable si $a = \pm\infty$
- On peut appliquer plusieurs fois de suite B.H.

Exemples

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\ln(x+1)} = \dfrac{0}{\ln(1)} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} \overset{B.H.}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\frac{1}{x+1}} = \lim\limits_{x \to 0} x+1 = 1$

f.i.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{\ln(x+1)} = \text{"}\dfrac{1}{0}\text{"} = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \text{"}\dfrac{+\infty}{+\infty}\text{"} \overset{B.H.}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{2x} = \text{"}\dfrac{+\infty}{+\infty}\text{"} \overset{B.H.}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{2}$

f.i. f.i.

$= \dfrac{+\infty}{2} = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$ (rappel $\dfrac{\text{nbre}}{\infty} = 0$)

ex 1.1.5 a) c) f) h)

1.1.9 sauf b)