Problème 4 (17 points)

Un avion d'acrobaties vole à une altitude constante avant de plonger vers le sol et de remonter ensuite. L'altitude (en mètres) de l'avion en fonction du nombre x de minutes écoulées depuis le début du plongeon est donnée par la fonction

$$f(x) = 4'000 - \frac{10'000\ln(x+1)}{x+1}$$

a) Quelle était l'altitude de l'avion au début du plongeon ?

b) Prouver par calculs que la dérivée de $f(x)$ est

$$f'(x) = \frac{10'000\,[\ln(x+1)-1]}{(x+1)^2}$$

c) Après combien de temps (à la seconde près) l'avion aura-t-il atteint son altitude minimale ?

d) Vérifier par calcul que l'avion ne touchera pas le sol sachant qu'il survole une plaine située à 297 mètres d'altitude.

e) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Problème 4 (17 points)

a) $f(0) = 4'000 - 0 = \boxed{4'000 \text{ mètres}}$

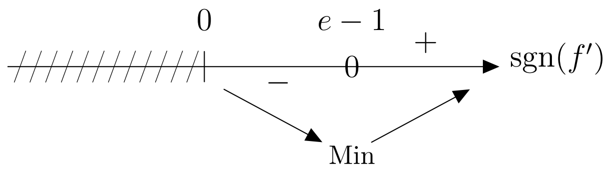
b) $f'(x) = 0 - 10'000 \dfrac{\frac{1}{x+1} \cdot (x+1) - \ln(x+1) \cdot 1}{(x+1)^2} = -10'000 \dfrac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$= 10'000 \dfrac{\ln(x+1) - 1}{(x+1)^2} = \boxed{\dfrac{10'000\,[\ln(x+1) - 1]}{(x+1)^2}}$ cqfd

c) Contrainte : $x \geqslant 0$ (donc la condition mathématique $x > -1$ n'a plus d'importance)

Zéro de f' : $\ln(x+1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow x + 1 = \mathrm{e} \Leftrightarrow x = \mathrm{e} - 1 \cong 1{,}72$

Croissance de $f(x)$:



L'avion atteindra donc son altitude minimale après 1,72 minutes environ, c'est-à-dire $\boxed{\text{1 min 43 sec}}$ environ.

d) $f(\mathrm{e} - 1) = 4'000 - \dfrac{10'000 \ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} \cong 321{,}2$

L'altitude minimale sera alors de 321,2 mètres.

$\boxed{\text{Donc, en effet, l'avion ne touchera pas le sol car } 321{,}2 > 297}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \overset{BH}{=} 4'000 - \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{10'000 \frac{1}{x+1}}{1} = 4'000 - \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{\dfrac{10'000}{x+1}}_{\to 0} = \boxed{4'000}$