Problème 5 (12 points)

Un bureau d'analyse a estimé que le bénéfice, en CHF, réalisé par une entreprise lorsqu'elle vend x objets est donné par la fonction f suivante :

$$f(x) = 2'000 \cdot (x - 100) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} + 10'000 \qquad \text{avec } x \geq 73$$

a) Calculer le bénéfice si l'entreprise vend 100 objets.

b) Calculer le bénéfice si l'entreprise vend 400 objets.

c) Montrer que $f'(x) = 2'000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \cdot (2 - 0{,}01x)$.

d) Déterminer quel doit être le nombre d'objets vendus pour que le bénéfice soit maximal et calculer ce bénéfice maximal.

Problème 6 (25 points)

Chaque question se résout indépendamment des autres. Les réponses doivent être détaillées.

Question 1 Déterminer l'ensemble de définition $ED(f)$ de la fonction f donnée par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$.
Question 2 Déterminer les équations des asymptotes de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{2x + 1}$.
Question 3 Démontrer que la fonction h donnée par $h(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 1}$ n'a pas d'extremum.
Question 4 Soit la fonction k définie par $k(x) = x^2 \cdot \ln(x)$. Déterminer une équation de la tangente t à la courbe représentative de k en son point $T(1\,;\,?)$.
Question 5 Calculer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x \to 0_+} x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2)}{x+1}$
Question 6 Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$ n'a pas de zéro.

Problème 5 (12 points)

a) $f(100) = 2'000 \cdot (100 - 100) \cdot \mathrm{e}^{-1-1} + 10'000 = 0 + 10'000 = \boxed{10'000 \text{ CHF}}$.

b) $f(400) = 2'000 \cdot (400 - 100) \cdot \mathrm{e}^{-4-1} + 10'000 = 2'000 \cdot 300 \cdot \mathrm{e}^{-5} + 10'000 \simeq$

$4'042{,}77 + 10'000 \simeq \boxed{14'042{,}75 \text{ CHF}}$.

c) $f'(x) = 2'000 \cdot [(x - 100) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1}]' = *$

$u(x) = x - 100 \;\Rightarrow\; u'(x) = 1$

$v(x) = \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \;\Rightarrow\; v'(x) = \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \cdot (-0{,}01)$ car $(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u \cdot u'$.

De plus, $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \;\Rightarrow$

$* = 2'000 \cdot [(1 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} + (x - 100) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \cdot (-0{,}01)] =$

$2'000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \cdot [(1 + (x - 100) \cdot (-0{,}01)] =$

$2'000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \cdot [1 - 0{,}01x + 1] = 2'000 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}01x-1} \cdot (2 - 0{,}01x)$

d) Zéro de f' : $2 - 0{,}01x = 0 \;\Rightarrow\; 0{,}01x = 2 \;\Rightarrow\; x = 200$.

Contrainte : $x \geq 73$.

x		200	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Croissance de f	$\nearrow$	max	$\searrow$

Pour que le bénéfice soit maximal, il faut vendre $\boxed{200 \text{ objets}}$.

Bénéfice maximal : $f(200) = 2'000 \cdot (200 - 100) \cdot \mathrm{e}^{-2-1} + 10'000 = 2'000 \cdot 100 \cdot \mathrm{e}^{-3} + 10'000 \simeq$
$9'957{,}40 + 10'000 \simeq \boxed{19'957{,}40 \text{ CHF}}$.

Problème 6 (25 points)

Question 1 (3 points)

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$.

Les conditions sont : $x + 1 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq -1$ et $x \neq 0$.

Donc $\boxed{ED(f) = [-1\,;\,+\infty[- \{0\} \;=\; [-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[}$.

Question 2 (5 points)

$g(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{2x+1}$.

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 4x}{2x+1} = \text{" } \frac{2{,}25}{0} \text{ "} = \infty \;\Rightarrow\; \boxed{\text{AV : } x = -0{,}5}$$

Pour la fonction g, deg(N)$= 2$ et deg(D)$= 1$, g possède donc une AO.

Division euclidienne :

$$\begin{array}{l|l} x^2 - \;\; 4x + \quad 0 & 2x+1 \\ \hline x^2 + 0{,}5x & 0{,}5x - 2{,}25 \;\Rightarrow\; \boxed{\text{AO : } y = 0{,}5x - 2{,}25} \\ \hline \quad - 4{,}5x + \quad 0 & \\ \quad - 4{,}5x - 2{,}25 & \\ \hline \qquad\qquad + 2{,}25 & \end{array}$$

Variante :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^2-4x}{2x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-4}{2x+1} = \frac{1}{2} = m = \text{la pente}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x}{2x+1} - \frac{1}{2}x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-8x}{4x+2} - \frac{2x^2+x}{4x+2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-9x}{4x+2} = \frac{-9}{4} = -2{,}25 = h = \text{l'ordonnée à l'origine.}$$

Donc, $\boxed{\text{AO : } y = 0{,}5x - 2{,}25}$

Question 3 (4 points)

$h(x) = \dfrac{3x-1}{x-1}$.

$h'(x) = \dfrac{3 \cdot (x-1) - (3x-1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{3x-3-3x+1}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

h' n'a pas de zéro, donc h n'a pas d'extremum.

Question 4 (5 points)

$k(x) = x^2 \cdot \ln(x)$.

$k(1) = 1^2 \cdot \ln(1) = 1 \cdot 0 = 0 \;\Rightarrow\; T(1\,;\,0)$.

$k'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x$.

$k'(1) = 2 \cdot \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1 = m = \text{pente de } t \;\Rightarrow\; (t) : y = x + h$.

$T(1\,;\,0) \;\Rightarrow\; 0 = 1 + h \;\Rightarrow\; h = -1 \;\Rightarrow\; \boxed{(t) : y = x - 1}$ (ou : $\boxed{x - y - 1 = 0}$)

Question 5 (5 points)

a) $\lim\limits_{x \to 0_+} x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}} = 0_+ \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{0_+}} = 0_+ \cdot \mathrm{e}^{-\infty} = 0_+ \cdot 0_+ = 0_+$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2)}{x+1} \overset{\text{B-H}}{\underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{2x}{x^2}}{1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0_+$.

Question 6 (3 points)

$f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$.

$\ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x}{x^2+1} = 1 \;\Rightarrow\; x = x^2 + 1 \Rightarrow\; x^2 - x + 1 = 0$.

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Donc, f n'a pas de zéro.