Problème 1 (12 points)

Un réparateur de chaudière s'intéresse aux causes de ses interventions. Il observe que dans 2 cas sur 10, le problème est dû à une erreur de manipulation de son client. Dans ce cas il peut réparer la chaudière 3 fois sur 4, sinon il doit la remplacer. Le reste de ses interventions est dû à une défaillance mécanique, qui conduit 1 fois sur 10 au remplacement de la chaudière.

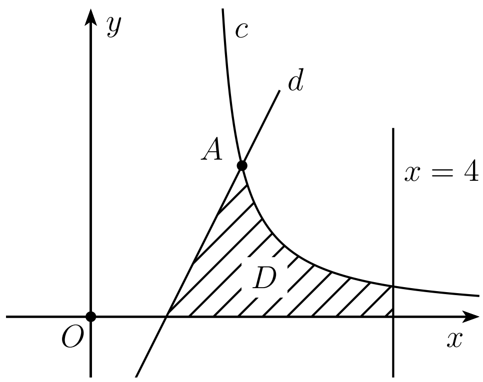
a) Lors d'une intervention, quelle est la probabilité que ce soit pour une défaillance mécanique et que la chaudière doive être remplacée ?

b) Lors d'une intervention, quelle est la probabilité qu'il puisse réparer une chaudière ?

c) Lors d'une intervention où il doit remplacer une chaudière, quelle est la probabilité que ce soit dû à une erreur de manipulation du client ?

d) Quelle est la probabilité que ses trois prochaines interventions soient dues à une défaillance mécanique ?

Problème 2 (21 points)



Soit c la courbe d'équation $y = \dfrac{2}{2x-3}$

Soit d la droite d'équation $y = 2x - 2$

a) Déterminer, par calculs, les coordonnées du point d'intersection A de la courbe c et de la droite d représenté ci-dessus. (Le point A se situe dans le premier quadrant.)

Note : prendre le point $A(2; ?)$ pour la suite du problème, si vous n'avez pas répondu à la question précédente.

b) Déterminer l'aire exacte de la surface plane D fermée et limitée par l'axe Ox, la droite d, la courbe c et la verticale $x = 4$.

c) On fait tourner la surface D autour de l'axe Ox. Calculer le volume exact du solide engendré par cette rotation.

Problème 2 (21 points)

a) $\dfrac{2}{2x-3} = 2x-2 \quad\Rightarrow\quad 2 = (2x-3)(2x-2) \quad\Rightarrow\quad 2 = 4x^2-10x+6$

$\Rightarrow\quad 4x^2-10x+4=0 \quad\Rightarrow 2x^2-5x+2=0 \quad\Rightarrow\quad (2x-1)(x-2)=0$

$\Rightarrow\quad (2;2)$ et $\left(\frac{1}{2};-1\right) \leftarrow$ point à éliminer $\Rightarrow\quad \boxed{A(2;2)}$

b) aire du triangle sous la droite d (coupe l'axe Ox en $x=1$) : $\dfrac{1\cdot 2}{2} = 1$ u^2

ou alors : $\displaystyle\int_1^2 (2x-2)\,\mathrm{d}x = x^2-2x\Big|_1^2 = 4-4-(1-2) = 1$ u^2

aire sous la courbe c : $\displaystyle\int_2^4 \frac{2}{2x-3}\,\mathrm{d}x = \ln(|2x-3|)\Big|_2^4 = \ln(5) - \underbrace{\ln(1)}_{0} = \ln(5)$ u^2

$\Rightarrow\quad \boxed{A = \ln(5)+1\ u^2}$

c) volume du cône engendré par la rotation de d : $\dfrac{\pi\cdot 2^2\cdot 1}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$ u^3

ou alors : $\displaystyle\pi\int_1^2 (2x-2)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^2 (4x^2-8x+4)\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{4}{3}x^3-4x^2+4x\right]_1^2$

$\displaystyle= \pi\left[\frac{32}{3}-16+8-\left(\frac{4}{3}-4+4\right)\right] = \pi\left[\frac{28}{3}-8\right] = \frac{4\pi}{3}$ u^3

ou encore : $\displaystyle\pi\int_1^2 (2x-2)^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_1^2 2(2x-2)^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{3}(2x-2)^3\right]_1^2$

$\displaystyle= \frac{\pi}{2}\left[\frac{8}{3}-0\right] = \frac{4\pi}{3}$ u^3

volume engendré par la rotation de c : $\displaystyle\pi\int_2^4 \frac{4}{(2x-3)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_2^4 2(2x-3)^{-2}\,\mathrm{d}x$

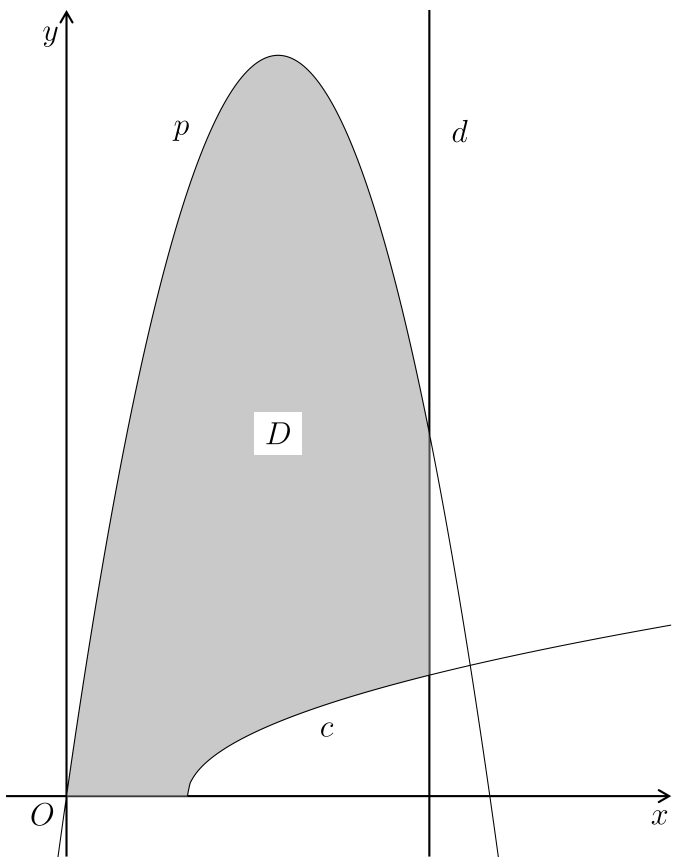
$\displaystyle= 2\pi\left[\frac{1}{(-1)}(2x-3)^{-1}\right]_2^4 = 2\pi\left[\frac{-1}{2x-3}\right]_2^4 = 2\pi\underbrace{\left[-\frac{1}{5}-(-1)\right]}_{\frac{4}{5}} = \frac{8\pi}{5}$ u^3

$\Rightarrow\quad V = \dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{8\pi}{5} = \boxed{\dfrac{44\pi}{15}\ \mathrm{u}^3}$

Problème 3 (16 points)

On donne :

- la parabole p d'équation : $y = -x^2 + 7x$
- la courbe c d'équation : $y = \sqrt{x-2}$
- la droite d d'équation : $x = 6$.



Le domaine grisé D est la surface plane fermée contenant le point $O(0\,;0)$ et limitée par l'axe Ox, la parabole p, la droite d et la courbe c.

a) Déterminer l'aire exacte du domaine D.

b) On fait tourner le domaine D autour de l'axe Ox. Calculer le volume exact du solide de révolution engendré par cette rotation.

Problème 3 (16 points)

a) $\displaystyle\int_0^6 -x^2+7x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2\Big|_0^6 = [-\frac{1}{3}\cdot 6^3+\frac{7}{2}\cdot 6^2]-[0] = -\frac{216}{3}+7\cdot 18 = -72+126 = 54\,\mathrm{u}^2.$

$$\int_2^6 \sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x = \int_2^6 (x-2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x-2)^{\frac{1}{2}+1}\Big|_2^6 = \frac{2}{3}\cdot(x-2)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^6 = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{(x-2)^3}\Big|_2^6 =$$

$$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(6-2)^3} - \frac{2}{3}\cdot\sqrt{(2-2)^3} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{4^3} = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3}\,\mathrm{u}^2 = 5{,}\overline{3}\,\mathrm{u}^2.$$

Aire du domaine D : $54 - \dfrac{16}{3} = \dfrac{162}{3} - \dfrac{16}{3} = \boxed{\dfrac{146}{3}\,\mathrm{u}^2} = \boxed{48{,}\overline{6}\,\mathrm{u}^2}$.

b) $\displaystyle\pi\int_0^6 (-x^2+7x)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^6 x^4-14x^3+49x^2\,\mathrm{d}x = \pi[\frac{1}{5}x^5 - 14\cdot\frac{1}{4}x^4 + 49\cdot\frac{1}{3}x^3]\Big|_0^6 =$

$$\pi\{[\frac{1}{5}\cdot 6^5 - \frac{7}{2}\cdot 6^4 + \frac{49}{3}\cdot 6^3] - [0]\} = \pi[\frac{7'776}{5} - 4'536 + 3'528] = \pi\frac{7'776 - 22'680 + 17'640}{5} =$$

$$\pi\frac{2'736}{5} = \frac{2'736}{5}\pi\,\mathrm{u}^3 = 547{,}2\,\pi\,\mathrm{u}^3.$$

$$\pi\int_2^6 (\sqrt{x-2})^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_2^6 x-2\,\mathrm{d}x = \pi[\frac{1}{2}x^2 - 2x]\Big|_2^6 = \pi[(\frac{1}{2}\cdot 6^2 - 12) - (\frac{1}{2}\cdot 2^2 - 4)] =$$

$$\pi[6+2] = 8\pi\,\mathrm{u}^3.$$

Volume du solide de révolution : $\dfrac{2'736}{5}\pi - \dfrac{40}{5}\pi = \boxed{\dfrac{2'696}{5}\pi\,\mathrm{u}^3} = \boxed{539{,}2\,\pi\,\mathrm{u}^3}$.