# Le cercle

## Équation cartésienne du cercle

**Définition 1.** Le *cercle* $\gamma$ de centre $C(c_1;c_2)$ et de rayon $r$ ($r \in \mathbb{R}_+$) est l'ensemble des points $P$ du plan tels que la distance de $C$ à $P$ vaut $r$.

On a donc :

$$\begin{aligned} P(x;y) \in \gamma &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{CP}\| = r \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2} = r \\ &\Leftrightarrow \boxed{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2 = r^2} \end{aligned}$$

Cette équation est appelée **équation cartésienne normale du cercle**.

En développant l'équation cartésienne du cercle on obtient une équation appelée **équation cartésienne générale** ou **développée du cercle** :

$$\begin{aligned} (x-c_1)^2+(y-c_2)^2 = r^2 &\Leftrightarrow x^2-2c_1x+c_1^2+y^2-2c_2y+c_2^2-r^2=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-2c_1x-2c_2y+c_1^2+c_2^2-r^2=0 \end{aligned}$$

**Remarques**

1. Cette équation est utile pour calculer des points d'intersection par exemple
2. L'équation générale d'un cercle est une équation du $2^{\text{ème}}$ degré en $x$ et $y$.
3. Dans l'équation générale d'un cercle, les coefficients de $x^2$ et $y^2$ sont égaux (en général égaux à 1, sinon on divise toute l'équation par le coefficient commun).
4. Dans l'équation d'un cercle, il n'y a pas de termes en $xy$.

## Équations de cercles particuliers

1. Équation d'un cercle **centré à l'origine** : on a $c_1 = 0$ et $c_2 = 0$, d'où $\gamma : x^2+y^2 = r^2$.

2. Équation d'un cercle **de diamètre** $AB$, où $A(a_1;a_2)$ et $B(b_1;b_2)$ :

   — le centre du cercle est le milieu de $AB$, c.à.d $C\left(\dfrac{a_1+b_1}{2};\dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$,

   — son rayon est $r = \dfrac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2}$

3. Équation d'un cercle **passant par trois points** non alignés $F$, $G$ et $H$. $\gamma$ est **le cercle circonscrit** au triangle $FGH$ :
   — son centre $C$ est donc le point d'intersection des 3 médiatrices du triangle
   — son rayon est $r = \|\overrightarrow{CF}\| = \|\overrightarrow{CG}\| = \|\overrightarrow{CH}\|$

4. Équation du **cercle inscrit** dans un triangle $EFG$. $\gamma$ est un **cercle tangent** aux droites formant le triangle.
   — Le centre $C$ est l'intersection des bissectrices intérieures du triangle.
   — le rayon $r$ est la distance du centre aux côtés du triangle :
   $r = \delta(C; EF) = \delta(C; FG) = \delta(C; EG)$

## Position relative et intersection

### Droite et cercle

Soit $\gamma$ un cercle de centre $C$ et de rayon $r$ et une droite $d$.

1. Pour situer la droite $d$ par rapport au cercle $\gamma$, on calcule la distance entre le centre $C$ et la droite $d$ puis on la compare avec le rayon $r$.
   Trois situations peuvent se présenter :
   a) $\delta(C; d) < r \quad \Leftrightarrow$ la droite $d$ est **sécante** à $\gamma$ (2 points d'intersection).
   b) $\delta(C; d) = r \quad \Leftrightarrow$ la droite $d$ est **tangente** à $\gamma$ (1 point d'intersection).
   c) $\delta(C; d) > r \quad \Leftrightarrow$ la droite $d$ est **extérieure** à $\gamma$ (aucun point d'intersection).
2. Pour déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection de $d$ et $\gamma$, il faut résoudre par substitution le système formé par les équations du cercle et de la droite.

### Position relative de deux cercles

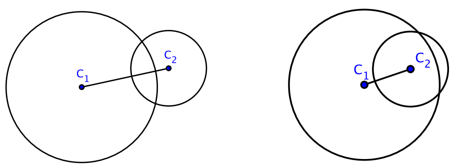
Soit les cercles $\gamma_1$ de centre $C_1$ et de rayon $r_1$ et $\gamma_2$ de centre $C_2$ et de rayon $r_2$ avec $r_1 > r_2$.

1. Pour situer $\gamma_1$ par rapport à $\gamma_2$, on compare la distance $\|\overrightarrow{C_1C_2}\|$ entre les centres avec $r_1 + r_2$ et $r_1 - r_2$.

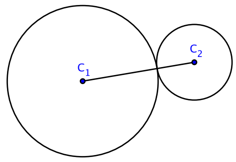
   Cinq situations peuvent se présenter :

   a) Les cercles sont **sécants** (2 pts d'intersection) si

   $r_1 - r_2 < \|\overrightarrow{C_1C_2}\| < r_1 + r_2$

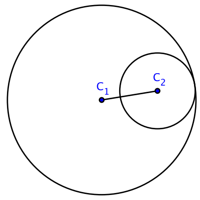


b) Les cercles sont **tangents extérieurement** (1 pt d'intersection) si



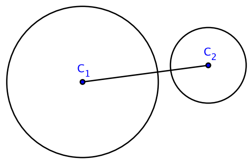

$\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = r_1 + r_2$

c) Les cercles sont **tangents intérieurement** (1 pt d'intersection) si



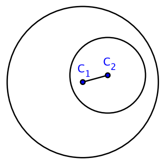

$\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = r_1 - r_2$

d) Les cercles sont **extérieurs** (aucun point d'intersection) si




$\|\overrightarrow{C_1C_2}\| > r_1 + r_2$

e) Un cercle est à l'**intérieur** de l'autre (aucun point d'intersection) si




$\|\overrightarrow{C_1C_2}\| < r_1 - r_2$

2. Pour déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection de $\gamma_1$ et $\gamma_2$, il faut résoudre le système formé des équations des deux cercles (on utilise l'équation cartésienne développée du cercle).
   Remarque : En soustrayant les 2 équations on obtient l'équation de la droite passant par les points d'intersection des deux cercles s'ils existent ou l'équation de la médiatrice des centres (on termine ensuite la résolution comme dans le cas précédent (intersection d'une droite et d'un cercle)).