

Chapitre 4

4.1 Puissances et racines

Déf : puissance n^e de a :
 $a \in \mathbb{R}$
 $n \in \mathbb{N}^*$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fois}}$$

↑ exposant
↑ base

Propriétés :

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

3) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

5)
$$\begin{cases} \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & \text{si } n > m \\ \frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}} & \text{si } n < m \end{cases}$$

Rem: si a est négatif

a^n $\begin{cases} \text{positif si } n \text{ est pair} \\ \text{négatif si } n \text{ est impair} \end{cases}$

exple : $(-3)^2 = 9$

$-3^2 = -9$

$(-3)^3 = -27$

On aimerait étendre la définition pour $n=0$ et n négatif:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} 2^3 \\ \cdot 2 \left(2^2 \right) \end{array} \right\} : 2 \\
 \left. \begin{array}{l} 2^2 \\ \cdot 2 \left(2^1 \right) \end{array} \right\} : 2 \\
 2^0 = 1 \quad \left. \right\} : 2 \\
 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad \left. \right\} : 2 \\
 2^{-2} = \frac{1}{4} \quad \left. \right\} : 2 \\
 2^{-3} = \frac{1}{8} \quad \left. \right\} : 2 \\
 \vdots
 \end{array}$$

Déf: $a^0 = 1$ $a \in \mathbb{R}^*$
 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $n \in \mathbb{Z}$

exemples: $* (-3)^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ // $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

$* 8 \cdot 10^{-5} = \frac{8}{10^5} = 0,00008$

$* \frac{1}{7^{-4}} = 7^4$ car $\frac{1}{\frac{1}{7^4}} = 7^4 \Rightarrow \frac{1}{a^{-n}} = a^n$

Propriétés (suite)

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$ $a \text{ et } b \neq 0$

7) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $a \neq 0$, $n, m \in \mathbb{Z}$