Chapitre 2

Géométrie

Nous considérerons toujours un repère $(O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ orthonormé du plan ($\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ et $\|\overrightarrow{e_1}\| = \|\overrightarrow{e_2}\| = 1$).

Rappels

Soit les vecteurs $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ et les points $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ et $C(c_1; c_2)$.

- $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \overrightarrow{e_1} + v_2 \overrightarrow{e_2}$
- $A(a_1; a_2) \iff \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$
- **Vecteurs colinéaires** : $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires si $\overrightarrow{w} = k\overrightarrow{v}$, avec $k \in \mathbb{R}$
- **Critère de colinéarité** : $\overrightarrow{v} \sim \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}) = v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 = 0$
- **Norme** du vecteur $\overrightarrow{v}$: $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$
- **Distance entre deux points** A et B : $\delta(A; B) = \|\overrightarrow{AB}\|$
- **Vecteurs perpendiculaires de même norme** que $\overrightarrow{v}$: $\overrightarrow{v_\perp} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_\perp}' = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$
- **Produit scalaire** de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$: $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$
- **Critère d'orthogonalité** : $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0$
- **Angle** entre deux vecteurs : $\varphi = \cos^{-1}\left(\dfrac{\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\|}\right)$
- M **milieu** du segment AB : $M\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}; \dfrac{a_2 + b_2}{2}\right)$

- G **centre de gravité** du triangle ABC : $G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$

- **Aire du triangle** construit sur $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$: $\sigma = \frac{1}{2}\,|\det(\overrightarrow{v};\overrightarrow{w})\,| = \frac{1}{2}\,|v_1\cdot w_2 - v_2\cdot w_1\,|$

Soit une **droite** d passant par $A(a_1;a_2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d}=\begin{pmatrix} d_1\\ d_2\end{pmatrix}$.

- Un point $P(x;y)$ appartient à d si et seulement si les équations suivantes sont vérifiées :
  - **Équation vectorielle paramétrique** : $\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} d_1\\ d_2\end{pmatrix}\quad k\in\mathbb{R}$
  - **Système d'équations paramétriques** : $\begin{cases} x=a_1+kd_1\\ y=a_2+kd_2\end{cases}\quad k\in\mathbb{R}$
  - **Équation cartésienne** : $ax+by+c=0$ avec $\overrightarrow{d}=\begin{pmatrix} -b\\ a\end{pmatrix}$

    Autre forme : si d n'est pas verticale : $y=mx+h\quad m,h\in\mathbb{R}$
    si d est verticale : $x=x$ (1^e coordonnée de P !)

- **Vecteur normal** de d : $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix} -d_2\\ d_1\end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}$

- **Pente** de d : $m=\frac{d_2}{d_1}$ ou $m=-\frac{a}{b}$

- **Droite perpendiculaire** à d : $d_\perp : bx-ay+c'=0$

- **Critères de parallélisme** de deux droites d_1 et d_2 :
  $m_1=m_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{d_1}\sim\overrightarrow{d_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}\sim\overrightarrow{n_2}$

- **Critères d'orthogonalité** de deux droites d_1 et d_2 :
  $m_1\cdot m_2=-1\Leftrightarrow\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$

- **Angle aigu** entre deux droites d_1 et d_2 : $\varphi=\cos^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}|}{\|\overrightarrow{d_1}\|\cdot\|\overrightarrow{d_2}\|}\right)=\tan^{-1}\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}\right|$

- **Distance d'un point** $P(p_1;p_2)$ **à une droite** d : $\delta(P;d)=\frac{|ap_1+bp_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

- **Bissectrices** de deux droites d_1 et d_2 : $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$