

4.2 Exponentielles et logarithmes

Exple d'intro : Une feuille de 0,1 mm d'épaisseur est pliée en 2, puis encore en 2, ... etc...
Combien de fois faudrait-il plier cette feuille pour obtenir une épaisseur de 2m? 20m?
pour atteindre le soleil? (149'600'000 km)
terre-soleil

$$\begin{array}{l} 0,1 \\ 1x \quad 0,2 \quad \left. \begin{array}{l} \downarrow \cdot 2 \\ \downarrow \cdot 2 \\ \downarrow \cdot 2 \end{array} \right\} \\ 2x \quad 0,4 \\ 3x \quad 0,8 \\ \vdots \\ nx \quad 0,1 \cdot 2^n \end{array} = 0,1 \cdot 2^3$$

$$1) \quad 0,1 \cdot 2^n = 2'000 \quad (\text{mm})$$

$$2^n = 20'000$$

← on ne sait résoudre cette équation

$$\text{par tâtonnement : } 2^{14} = 16'384$$

$$2^{15} = 32'768$$

Il "faut" plier 15 fois pour dépasser 2m.

$$2) \quad 0,1 \cdot 2^n = 20'000$$

$$2^n = 200'000 \quad \text{par tâtonnement : 18 fois}$$

$$3) \quad 0,1 \cdot 2^n = 1,496 \cdot 10^{14}$$

$$2^n = 1,496 \cdot 10^{15}$$

... $n = 51$ fois

Equation exponentielle du type $a^x = a^y$

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}$ alors

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

Exemples

1) $2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3 \quad S = \{3\}$

2) $4^{x^2} = 256 \Leftrightarrow 4^{x^2} = 4^4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \quad S = \{\pm 2\}$

3) $3^{x+2} = 81 \Leftrightarrow x+2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

4) $8^{5x-2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{3(5x-2)} = 2^{-1} \Leftrightarrow 15x - 6 = -1$

$$\Leftrightarrow 15x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

5) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x = -5$

$$5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

$$(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

chgmt de variable

$$y = 5^x$$

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$(y-5)(y-1) = 0$$

$$y = \begin{cases} 5 \Rightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1 \\ 1 \Rightarrow 5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow S = \{0, 1\}$$

6) $3 \cdot 9^x + 8 \cdot 3^x - 3 = 0$

$$3 \cdot (3^x)^2 + 8 \cdot 3^x - 3 = 0$$

$$y = 3^x$$

$$\Rightarrow 3y^2 + 8y - 3 = 0 \quad \Delta = 8^2 + 4 \cdot 9 = 100$$

$$y_{1,2} = \frac{-8 \pm 10}{6} = \begin{cases} -3 \Rightarrow 3^x = -3 \quad \text{⚡} \\ \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -1 \end{cases} \Rightarrow S = \{-1\}$$