Propriétés du logarithme

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ et $u, v \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{R}$

1. $\log_a(1) = 0$ découle de la déf.
2. $\log_a(a) = 1$ "
3. $\log_a(a^u) = u$ "
4. $a^{\log_a(u)} = u$ preuve : $\log_a(u) = x \Leftrightarrow a^x = u$ $\Rightarrow a^{\log_a(u)} = u$

les fonctions sont réciproques l'une de l'autre.

5. $\boxed{\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)}$

preuve : $\log_a(u) = x \Leftrightarrow a^x = u$

$\log_a(v) = y \Leftrightarrow a^y = v$

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(a^x \cdot a^y) = \log_a(a^{x+y}) = x+y$$
$$= \log_a(u) + \log_a(v)$$

#

6. $\boxed{\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)}$

preuve : $\log_a(u) = x \Leftrightarrow a^x = u$

$\log_a(v) = y \Leftrightarrow a^y = v$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = \log_a(a^{x-y}) = x-y$$
$$= \log_a(u) - \log_a(v)$$

#

7) $\boxed{\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = -\log_a(v)}$

découle de la prop. 6 avec $u = 1$
et prop. 1

8) $\boxed{\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)}$

découle de la prop. 5
avec $u^r = \underbrace{u \cdot u \cdot u \cdot \ldots \cdot u}_{r \text{ fois}}$

Exemple

Simplifier : $\frac{1}{2}\log_3(36) - \log_3(2)$

$$= \log_3(\underbrace{36^{1/2}}_{6}) - \log_3(2)$$

$$= \log_3\left(\frac{6}{2}\right) = \log_3(3) = 1$$

Equations logarithmiques

du type $\boxed{\log_a(x) = \log_a(y) \iff x = y}$

⚠ on vérifie les solutions (car $x, y \in \mathbb{R}_+^*$)

Exple

$$\log(2x-3) + \log(x+1) = \log(7)$$

$$\log\big((2x-3)(x+1)\big) = \log(7)$$

$$(2x-3)(x+1) = 7$$

$$2x^2 - x - 10 = 0$$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 81$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{4} = \begin{cases} 5/2 & \checkmark \\ -2 & \times \end{cases}$$

⚠ vérif

$\log(5-3) + \log(7/2) \overset{\checkmark}{=} \log(7)$

$\log(\underbrace{-4-3}_{<0})$ ↯

$$\Rightarrow \quad S = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

Ex 4.2.4

a) $\log(16) + 2\log(3) - 2\log(2) - \frac{1}{2}\log(9)$

$$= \log(16) + \log(3^2) - \log(2^2) - \log(9^{1/2})$$

$$= \log\left(\frac{16 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 9^{1/2}}\right) = \log\left(\frac{\overset{4}{\cancel{16}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3}}\right) = \log(12)$$