Changement de base

thm : Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

$\forall\, u \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\quad \log_a(u) = \dfrac{\log_b(u)}{\log_b(a)}$

dém :

$$u = a^{\log_a(u)} \qquad (\text{prop } 4.)$$

$$\Leftrightarrow \log_b(u) = \log_b\left(a^{\log_a(u)}\right) \qquad (\log \text{ est bijective})$$

$$\Leftrightarrow \log_b(u) = \log_a(u) \cdot \log_b(a) \qquad (\text{prop } 8.)$$

$$\Leftrightarrow \log_a(u) = \frac{\log_b(u)}{\log_b(a)} \qquad \#$$

En particulier : $\quad \log_a(u) = \dfrac{\log(u)}{\log(a)} = \dfrac{\ln(u)}{\ln(a)}$

On peut enfin calculer n : $\quad 2^n = 20'000 \quad$ (feuille de papier plier en 2 ...)

$$n = \log_2(20'000)$$

$$= \frac{\log(20'000)}{\log(2)} \cong 14,29$$

Processus exponentiel

Un objet vaut actuellement 100 CHF.
Si sa valeur triple chaque année, quelle sera sa valeur dans 5 ans ? dans n années ?

$$\begin{aligned} v(0) = v_0 &= 100 \\ v(1) &= 100 \cdot 3 \\ &\vdots \\ v(5) &= 100 \cdot 3^5 \\ &\vdots \\ v(n) &= 100 \cdot 3^n \end{aligned}$$

$\cdot 3$, $\cdot 3$, $\cdot 3^5$

fct exponentielle car variable n est en exposant

Combien d'année faudra-t-il attendre pour que sa valeur atteigne 5'904'900 CHF ?

$$v(n) = 5'904'900$$

$$1\cancel{00} \cdot 3^n = 5'904'9\cancel{00}$$

$$n = \log_3(59'049) = \frac{\ln(59'049)}{\ln(3)} = 10 \text{ ans}$$

Et si la valeur triple chaque 2 ans ?

$$\begin{aligned} v(0) &= 100 \\ v(2) &= 100 \cdot 3 \\ v(4) &= 100 \cdot 3^2 \\ v(6) &= 100 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$$v(n) = 100 \cdot 3^{n/2}$$

calculons $v(1) = 100 \cdot 3^{1/2} = 100 \cdot \sqrt{3} \cong 173{,}2$ CHF valeur initiale (v_0)

La fonction du type $\boxed{v(n) = v(0) \cdot a^{n/k}}$ fréquence

modélise un processus exponentiel taux de croissance

ex 4.2.14 à 4.2.17 (fct donnée)

4.2.19 à 4.2.21 (" à déterminer)