4.2.14

$$y = 79{,}041 + 6{,}39x - e^{3{,}261 - 0{,}993x}$$

si $x = 1$: $y = 79{,}041 + 6{,}39 - e^{3{,}261 - 0{,}993} = 75{,}77$

La taille d'un enfant d'une année est d'un peu moins de 76 cm.

4.2.15

$$\ln(m) = \ln(2{,}4) + 1{,}84h$$

a) $\ln(21{,}8) = \ln(2{,}4) + 1{,}84h$

$\ln(21{,}8) - \ln(2{,}4) = 1{,}84h$

$\ln\left(\frac{21{,}8}{2{,}4}\right) = 1{,}84h$

$\frac{\ln\left(\frac{21{,}8}{2{,}4}\right)}{1{,}84} = h \cong 1{,}199$

Il mesure environ 1m20

b) $\ln(m) = \ln(2{,}4) + 1{,}84 \cdot 1{,}5$

$\ln(m) = \ln(2{,}4) + 2{,}76$

$m = e^{\ln(2{,}4) + 2{,}76} \cong 37{,}92$

Il pèse environ 37,9 kg

4.2.16

$$v = 0{,}0151 + 0{,}258 \log(P)$$

a) $v = 0{,}0151 + 0{,}258 \log(130'000) \cong 1{,}33$

Sa vitesse moyenne est de 1,3 m/s.

b) $1{,}5 = 0{,}0151 + 0{,}258 \log(P)$

$\frac{1{,}5 - 0{,}0151}{0{,}258} = \log(P)$

$P = 10^{\frac{1{,}5 - 0{,}0151}{0{,}258}} \cong 569'411{,}66$

La population serait de 569'411 environ.

4.2.17

$$m = 2'600(1-0{,}51e^{-0{,}057t})^3$$

a) $t=0$: $m = 2'600(1-0{,}51e^{-0{,}057\cdot 0})^3$

$= 2'600(1-0{,}51)^3 \cong 305{,}89$

Elle pèse environ 306 kilo.

b)
$$1800 = 2'600(1-0{,}51e^{-0{,}057t})^3$$

$$\frac{1800}{2600} = (1-0{,}51e^{-0{,}057t})^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{9}{13}} = 1-0{,}51e^{-0{,}057t}$$

$$0{,}51e^{-0{,}057t} = 1-\sqrt[3]{\frac{9}{13}}$$

$$e^{-0{,}057t} = \frac{1-\sqrt[3]{\frac{9}{13}}}{0{,}51}$$

$$-0{,}057t = \ln\left(\frac{1-\sqrt[3]{\frac{9}{13}}}{0{,}51}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1-\sqrt[3]{9/13}}{0{,}51}\right)}{-0{,}057} \cong 26{,}08$$

L'éléphante a 26 ans.

4.2.18

~~$T = 37e^{-0{,}02t}$~~

~~a) $T = 37e^{-0{,}02\cdot 45} \cong 15{,}04$~~

~~Sa température sera d'environ 15,04°~~

~~b) $25 = 37e^{-0{,}02t}$~~

~~$\frac{25}{37} = e^{-0{,}02t}$~~

~~$\ln\left(\frac{25}{37}\right) = -0{,}02t$~~

~~$t = \frac{\ln\left(\frac{25}{37}\right)}{-0{,}02} \cong 19{,}6$~~

~~Il faut le secourir avant 19,6 minutes~~

4.2.19

a) $N(0) = 10'000 \qquad = 10'000 \cdot 2^0$

$N(12) = 10'000 \cdot 2 \qquad = 10'000 \cdot 2^1 \quad (\cdot 2) \qquad (= 20'000)$

$N(24) = 10'000 \cdot 2 \cdot 2 = 10'000 \cdot 2^2 \quad (\cdot 2) \qquad (= 40'000)$

$\vdots$

$N(12t) = 10'000 \cdot 2^t \qquad \Rightarrow \qquad N(t) = 10'000 \cdot 2^{\frac{t}{12}}$

b) $1\text{sem.} = 7 \cdot 24\,h = 168\,h.$

$N(168) = 10'000 \cdot 2^{\frac{168}{12}} = 10'000 \cdot 2^{14} = 163'840'000$

Au bout d'une semaine il y aura environ $1{,}6384 \cdot 10^8$ bactéries

c) $30'000 = 10'000 \cdot 2^{t/12}$

$3 = 2^{t/12} \qquad | \log_2(\;)$

$\log_2(3) = \frac{t}{12}$

$12 \cdot \log_2(3) = t \cong 19{,}02$

$3 = 2^{t/12} \qquad | \log$

$\log(3) = \log(2^{t/12})$

$\log(3) = \frac{t}{12} \log(2)$

le nombre de bactéries aura triplé après 19h environ.

4.2.20

a) $N(0) = 1'000 \qquad \cdot \frac{600}{1000} = 0{,}6$

$N(3) = 600 \qquad = 1'000 \cdot 0{,}6$

$N(6) = 360 \qquad (\cdot 0{,}6) \qquad = 1'000 \cdot 0{,}6^2$

$N(3t) = 1'000 \cdot 0{,}6^t \qquad \Rightarrow \qquad N(t) = 1'000 \cdot 0{,}6^{t/3}$

$N(3) = 600 = 1000 e^{k3}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{5} = e^{3k}$

$\Rightarrow k = \frac{\ln(3/5)}{3} \cong -0{,}1702$

$N(t) = 1000 \cdot e^{-0{,}1702t}$

b) $N(12) = 1'000 \cdot 0{,}6^4 = 129{,}6$

$N(12) = 129{,}6 \cong 129{,}72$

Après une année il y aura environ 130 truites dans l'étang.

c) $80 = 1'000 \cdot 0{,}6^{t/3}$

$0{,}08 = 0{,}6^{t/3}$

$\log_{0,6}(0{,}08) = \frac{t}{3}$

$t = 3 \cdot \log_{0,6}(0{,}08) \cong 14{,}83$

$80 = 1000 \cdot e^{-0{,}1702t}$

$0{,}08 = e^{-0{,}1702t}$

$\frac{\ln(0{,}08)}{-0{,}1702} = t \cong 14{,}84$

Il ne restera plus que 80 truites après 14,8 mois.

~14 mois et 24 jours

4.2.21

a) $Q(0) = 10$
$Q(1) = 8$ $\Big\} \cdot 0{,}8$

$Q(t) = 10 \cdot 0{,}8^t$

$Q(1) = 8 = 10 \cdot e^{k \cdot 1}$
$0{,}8 = e^k$
$k = \ln(0{,}8) \cong -0{,}2231$

b) $Q(8) = 10 \cdot 0{,}8^8 \cong 1{,}68$

$Q(8) = 10 \cdot e^{-0{,}2231 \cdot 8} \cong 1{,}68$

Le patient a 1,68 mg de médicament dans le corps 8 heures après l'absorption.

c) $1 = 10 \cdot 0{,}8^t$
$0{,}1 = 0{,}8^t$
$\log_{0{,}8}(0{,}1) = t \cong 10{,}32$

$1 = 10 \cdot e^{-0{,}2231 \cdot t}$
$0{,}1 = e^{-0{,}2231 \cdot t}$
$t = \frac{\ln(0{,}1)}{-0{,}2231} \cong 10{,}32$

Il n'aura plus qu'1 mg après environ 10h19 minutes.

4.2.22

C_0 : capital initial
i : intérêt (en %) annuel
n : nbre d'année.

$C(0) = C_0$
$C_1 = C(1) = C_0 + C_0 \cdot i = C_0(1+i)$ $\quad \cdot(1+i)$
$C_2 = C(2) = C_0(1+i) + C_0(1+i)i = C_0(1+i)(1+i) = C_0(1+i)^2$ $\quad \cdot(1+i)$
$\vdots$

$$\boxed{C_n = C(n) = C_0(1+i)^n}$$

1) $C_n = 4'720(1+0{,}035)^{12} = 7'132{,}24$

2) $5'388{,}65 = C_0(1+0{,}035)^{24}$
$\frac{5'388{,}65}{1{,}035^{24}} = C_0 \cong 2'360.-$

3) $11'604{,}17 = 9'440(1+0{,}035)^n$ $\quad | : 9'440$
$\frac{11'604{,}17}{9'440} = 1{,}035^n$ $\quad | \log_{1{,}035}(\ )$

$\log_{1{,}035}\left(\frac{11'604{,}17}{9'440}\right) = n \cong 6$ ans.

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

4) $9'404,43 = 790(1+i)^{72}$

$\dfrac{9'404,43}{790} = (1+i)^{72} \quad \Big| \sqrt[72]{\ }$

$\sqrt[72]{\dfrac{9'404,43}{790}} = 1+i$

$\sqrt[72]{\dfrac{9'404,43}{790}} - 1 = i \cong 0,035 = 3,5\%$

4.2.23

$C_0 = 7'200'000 \qquad i = 3\% \qquad n = 133 = 2000-1867$

$C_{133} = 7'200'000(1,03)^{133} \cong 367'014'634$

le capital aurait valu environ 367'014'634 \$

4.2.24

$C_0 = 10'000 \qquad i = 11\% \qquad C_n = 20'000$

$20'000 = 10'000(1,11)^n$

$2 = 1,11^n \quad \big| \log_{1,11}()$

$\log_{1,11}(2) = n$

$n \cong 6,64$

Il faudra environ 6,64 ans soit 6 ans, 7 mois et 21 jours env.

4.2.25 taux de dépréciation annuel

a) $v(0) = 18'000$

$v(1) = 18'000 - 18'000 \cdot 0,25 = 18'000(1-0,25)$

$\vdots$

$v(t) = 18'000(1-0,25)^t = 18'000 \cdot 0,75^t$

b) $v(8) = 18'000 \cdot 0,75^8 = 1'802,03$

Après 8 ans la voiture ne vaut plus que 1'802.-

c) $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \lim\limits_{t\to\infty} 18'000 \cdot 0,75^t = 0$

Lorsque t devient très grand la voiture ne vaut plus rien.

4.2.26

Ex 4.2.26

ou

masse atomique

Po^{210}

polonium

(provient du radon + plomb)

(traces : eau, air, sols

très présent en profondeur croûte terrestre)

$\frac{1}{2}$ vie : temps nécessaire pour que la quantité de matière est diminué de moitié.

a) $Q(0) = 50$

$Q(30) = 43 \quad \cdot \frac{43}{50} \quad = 50 \cdot \frac{43}{50} = 50 \cdot 0{,}86$

$Q(60) = 50 \cdot \left(\frac{43}{50}\right)^2 = 50 \cdot 0{,}86^2$

$Q(30t) = 50 \cdot 0{,}86^t \Rightarrow \boxed{Q(t) = 50 \cdot 0{,}86^{t/30}}$

b) $Q(21) = 50 \cdot 0{,}86^{21/30} \cong 44{,}99$ ...

c) $25 = 50 \cdot 0{,}86^{t/30}$

$\frac{1}{2} = 0{,}86^{t/30} \quad \Big| \log_{0{,}86}(\;)$

$\log_{0{,}86}(0{,}5) = \frac{t}{30}$

$30 \cdot \log_{0{,}86}(0{,}5) = t \cong 137{,}87$ jours ..

4.2.27

a) $Q(0) = 100$
$Q(30) = 50 \quad = 100 \cdot \frac{1}{2} \quad = 100 \cdot 0{,}5$
$Q(60) = 25 \quad = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad = 100 \cdot 0{,}5^2$

$\downarrow \cdot \frac{1}{2}$ $\downarrow \cdot \frac{1}{2}$

$Q(30t) = 100 \cdot 0{,}5^t$

$Q(t) = 100 \cdot 0{,}5^{t/30}$

$Q(30) = 50 = 100 \cdot e^{k \cdot 30}$
$0{,}5 = e^{30k}$
$\frac{\ln(0{,}5)}{30} = k \cong -0{,}0231$
$Q(t) = 100 e^{-0{,}0231 t}$

b) $Q(5) = 100 \cdot 0{,}5^{5/30} = 100 \cdot 0{,}5^{1/6} \cong 89{,}09$ $\quad Q(5) \cong 89{,}09$

Après 5 ans il reste environ 89 tonnes de césium.

4.2.28

demi-vie : ~ 5730 ans (± 30 ans)

$Q(0) = 100$
$Q(5730) = 50$ $\quad \downarrow \cdot \frac{1}{2}$

$Q(t) = 100 \cdot 0{,}5^{t/5730}$

$17 = 100 \cdot 0{,}5^{t/5730}$
$0{,}17 = 0{,}5^{t/5730}$
$\log_{0{,}5}(0{,}17) = \frac{t}{5730}$

$5730 \cdot \log_{0{,}5}(0{,}17) = t \cong 14'648{,}13$ en 1940

~~Les peintures ont environ 14'722 ans, en 2014!~~
elles dateraient de $14'648 - 1940 = 12'708$ av. JC

4.2.29

$$h = \frac{40}{1+200e^{-0,2t}}$$

h : hauteur en m.
t : années

a) $h(30) = \frac{40}{1+200e^{-0,2\cdot 30}} = 26,74$

L'arbre de 30 ans mesure environ 26,74 mètres.

b) $16 = \frac{40}{1+200e^{-0,2t}} \quad \Big| \cdot (1+200e^{-0,2t})$

$1+200e^{-0,2t} = \frac{40}{16} = 2,5$

$200e^{-0,2t} = 1,5$

$e^{-0,2t} = \frac{1,5}{200} = \frac{3}{400} = 7,5\cdot 10^{-3} \quad \Big| \ln()$

$-0,2t = \ln\left(\frac{3}{400}\right)$

$t \cong \frac{\ln(3/400)}{-0,2} \cong 24,46$

Un arbre de 16m aura environ 24 ans et demi.

4.2.30

$$N = \frac{1000}{1+999\cdot 10^{-0,17t}}$$

a) $N(20) = \frac{1000}{1+999\cdot 10^{-0,17\cdot 20}} = 715,46$

Après 20 jours 715 personnes sont malades.

b) $\frac{1000}{1+999\cdot 10^{-0,17t}} = 600$

$1000 = 600(1+999\cdot 10^{-0,17t}) \quad \Big| : 600$

$\frac{5}{3} = 1+999\cdot 10^{-0,17t}$

$\frac{5}{3}-1 = 999\cdot 10^{-0,17t} \quad \Big| : 999$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{999} = 10^{-0,17t}$

$\frac{2}{2997} = 10^{-0,17t}$

$$\log\left(\frac{2}{2997}\right) = -0{,}17t$$

$$\frac{\log\left(\frac{2}{2997}\right)}{-0{,}17} = t \approx 18{,}68$$

600 personnes seront atteintes après 19 jours.