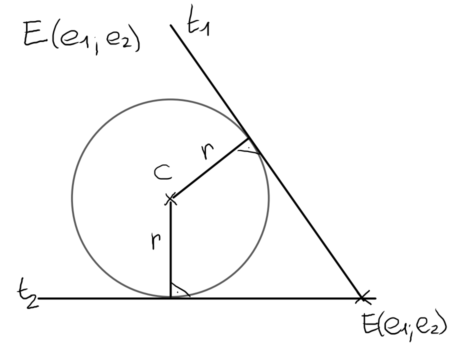
3) passant par un point extérieur au cercle : $E(e_1, e_2)$



On utilise la forme (pour t_1, t_2) $\boxed{y = mx+h}$

On sait que 1) $\boxed{E \in t_{1,2}}$

2) $\boxed{\delta(C; t_{1,2}) = r}$

Rem : permet de trouver les 2 tangents si aucune des deux n'est verticale

Exemple : $\gamma : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$ $\quad E(7;1)$

On commence par vérifier que E est extérieur au cercle

$C(1;3)$ et $r = \sqrt{20}$ $\quad \Rightarrow \quad \vec{CE} = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

$\delta(C;E) = \|\vec{CE}\| = \sqrt{6^2+(-2)^2} = \sqrt{40} > \sqrt{20} = r$ ✓

Recherche des tangentes : $y = mx + h \iff mx - y + h = 0$ (2 inc. meth)

1) $E(7;1) \in t_{1,2} \Rightarrow m\cdot 7 - 1 + h = 0 \iff 7m - 1 + h = 0$ (1e équation) $\iff h = -7m+1$

2) $\delta(C; t_{1,2}) = r \iff \dfrac{|m\cdot 1 - 3 + h|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{20}$ (2e équation) substitution

$\Rightarrow \dfrac{|m - 3 - 7m + 1|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{20} \quad \Big| \cdot \sqrt{m^2+1}$

$\iff |-6m-2| = \sqrt{20}\sqrt{m^2+1}$

$\iff -6m-2 = \pm\sqrt{20}\sqrt{m^2+1} \quad \Big| (\ )^2$

$\iff (-6m-2)^2 = \left(\pm\sqrt{20}\sqrt{m^2+1}\right)^2$

$\iff 36m^2+24m+4 = 20(m^2+1)$

$\iff 36m^2+24m+4 = 20m^2+20$

$\iff 16m^2+24m-16 = 0$

$\iff 2m^2+3m-2 = 0 \qquad \Delta = 9 - 4\cdot 2 \cdot (-2) = 25$

$\iff m_{1,2} = \dfrac{-3\pm 5}{4} = \begin{cases} -2 \Rightarrow h_1 = -7\cdot(-2)+1 = 15 \\ \frac{1}{2} \Rightarrow h_2 = -7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+1 = -\frac{5}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $t_1 : y = -2x + 15 \iff 2x + y - 15 = 0$

$t_2 : y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \iff x - 2y - 5 = 0$

On peut également utiliser une formule qui nous permet de trouver m.

$$\boxed{e_2 - c_2 = m(e_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2+1}}$$

(on ne trouve pas directement la tangente)

Reprenons l'exple : $C(1;3)$, $r=\sqrt{20}$ $E(7;1)$

$$\Rightarrow \quad 1-3 = m(7-1) \pm \sqrt{20}\sqrt{m^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 = 6m \pm \sqrt{20}\sqrt{m^2+1}$$

$$(*) \Leftrightarrow \quad -6m-2 = \pm\sqrt{20}\sqrt{m^2+1} \qquad |()^2$$

⚠ Isoler les $\sqrt{\ }$ avant d'élever au carré

$\hat{m}$ équation que précédemment

⋮

$$m_{1,2} = \begin{cases} -2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$m_1 = -2 \Rightarrow t_1 : y = -2x + h$

$E(7;1) \in t_1 \Rightarrow 1 = -2\cdot 7 + h \Leftrightarrow h = 15 \qquad \Rightarrow t_1 : y = -2x + 15$

$m_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow t_2 : y = \frac{1}{2}x + h$

$E(7;1) \in t_2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\cdot 7 + h \Leftrightarrow h = -\frac{5}{2} \qquad \Rightarrow t_2 : y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$