Juin 2011

$\gamma : x^2+y^2+4x-2y=15$ $\quad a : 2x+y=7$ $\quad T(-4;5)$ $\quad B(-3;8)$

a) $T \in \gamma$: $(-4)^2+5^2+4(-4)-2\cdot 5 = 16+25-16-10 = 15$ ✓

b) $x^2+4x+4 + y^2-2y+1 = 15+4+1$

$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 20 \Rightarrow C(-2;1)$ et $r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2+4x-2y=15 \\ 2x+y=7 \end{cases}$ $\Leftrightarrow y=-2x+7$ substitution

$\Rightarrow x^2+(-2x+7)^2+4x-2(-2x+7)=15$

$x^2+4x^2-28x+49+4x+4x-14=15$

$5x^2-20x+20=0$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$\downarrow$

$x=2$

$\Rightarrow y=-2\cdot 2+7=3 \Rightarrow I(2;3)$

$\Rightarrow$ le cercle est tangent à la droite car il n'y a qu'un point d'∩

d) * $t \perp (CT)$ car tangente passant par T

$\Rightarrow \vec{CT} = \begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_t = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow t : -x+2y+c=0$

* $T \in t \Rightarrow -(-4)+2\cdot 5+c=0 \Leftrightarrow c=-14$

$\Rightarrow t : -x+2y-14=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+7$

e) $a: \ 2x+y-7=0$

$t: \ -x+2y-14=0$

coeff. "échangés" avec un signe "changé" $\Rightarrow a \perp t \Rightarrow$ angle de $90°$

ou $\vec{d_a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{d_t} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d_a} \cdot \vec{d_t} = -1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow$ " $\Rightarrow$ "

ou $\vec{n_a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{n_t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n_a} \cdot \vec{n_t} = \dots = 0 \Rightarrow$ " $\Rightarrow$ "

ou $m_a = -\frac{2}{1} = -2$ $m_t = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$ et $m_a \cdot m_t = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow$ " $\Rightarrow$ "

f) $\frac{2x+y-7}{\underbrace{\sqrt{2^2+1^2}}_{\sqrt{5}}} = \pm \frac{-x+2y-14}{\underbrace{\sqrt{(-1)^2+2^2}}_{\sqrt{5}}}$ $\quad | \cdot \sqrt{5}$

$2x+y-7 = \pm(-x+2y-14)$

$\oplus$ $2x+y-7 = -x+2y-14$	$\ominus$ $2x+y-7 = x-2y+14$
$3x-y+7=0$	$b: \ x+3y-21=0$
$m = -\frac{3}{-1} = 3 > 0$ ✗	$m = -\frac{1}{3} < 0$ ✓

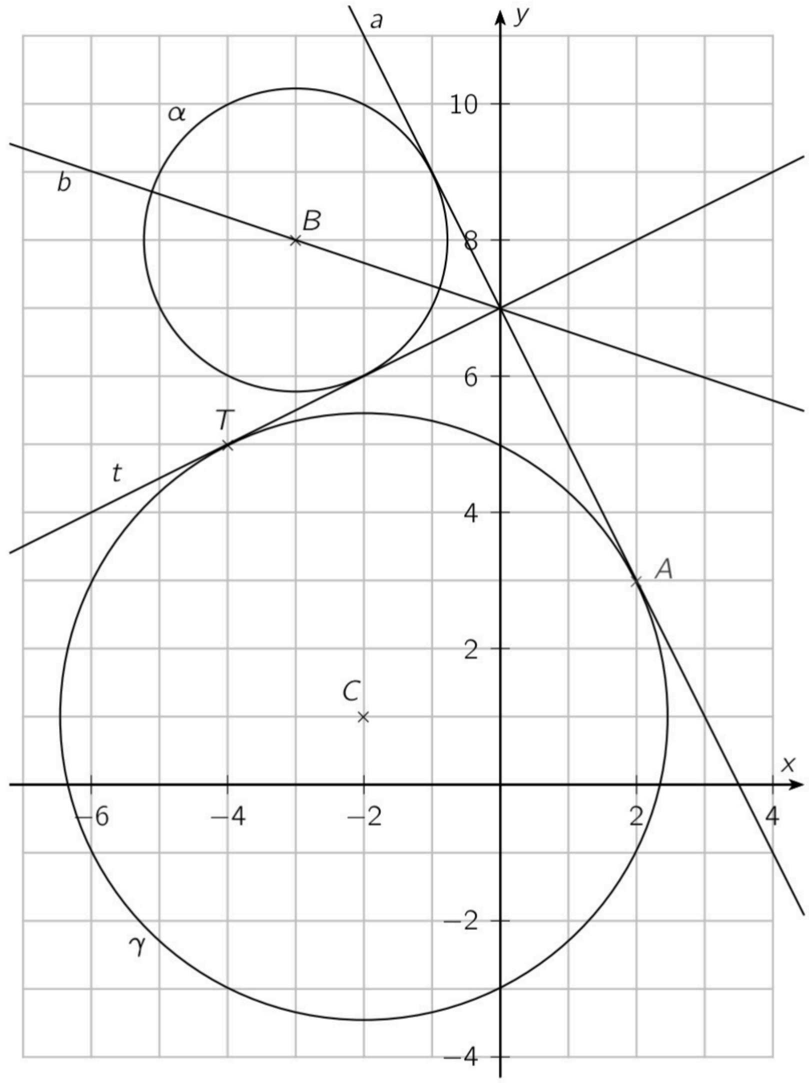
$B(-3;8) \in b \ : \ -3+3\cdot 8-21 = -3+24-21 = 0$ ✓

g) α de centre $B(-3;8) \Rightarrow \alpha: (x+3)^2+(y-8)^2 = r^2$

α tgt à $a \Rightarrow \delta(B;a) = r$

$\Leftrightarrow \frac{|2\cdot(-3)+8-7|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5} = r$

$\Rightarrow \alpha: (x+3)^2+(y-8)^2 = 5$


a
y
10
α
b
B
8
6
T
t
4
A
2
C
x
−6
−4
−2
2
4
−2
γ
−4

Juin 2013

$\gamma : x^2+y^2-8x+4y-20=0 \qquad P(14;8) \quad T(2;-8) \quad U(2;4)$

a) $\vec{OT} = \begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{UP} = \begin{pmatrix}14\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\4\end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ ne sont pas colinéaires

et

$\vec{OU} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{TP} = \begin{pmatrix}14\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\16\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ ne sont pas colinéaires

$\Rightarrow$ OTPU n'est pas un trapèze

b) $\text{Aire}_{OTPU} = \text{Aire}_{OTP} + \text{Aire}_{OPU} = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{OT};\vec{OP})\right| + \frac{1}{2}\left|\det(\vec{OP};\vec{OU})\right|$

$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2 & 14\\-8 & 8\end{vmatrix}\right| + \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}14 & 2\\8 & 4\end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|2\cdot 8-(-8)\cdot 14\right| + \frac{1}{2}\left|14\cdot 4 - 8\cdot 2\right| = 84\ u^2$

c) $x^2-8x+16+y^2+4y+4 = 20+16+4$

$(x-4)^2+(y+2)^2 = 40 \quad \Rightarrow \quad C(4;-2)$ et $r=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

d) $T\in\gamma : \quad 2^2+(-8)^2-8\cdot 2+4\cdot(-8)-20 = 4+64-16-32-20 = 0$ ✓

$P\notin\gamma : \quad 14^2+8^2-8\cdot 14+4\cdot 8-20 = 196+64-112+32-20 = 160 \neq 0$

e) tgte : $y=mx+h \iff mx-y+h=0$

* $P\in$ tgte $\Rightarrow 14m-8+h=0 \iff h=-14m+8 \Rightarrow$ tgte : $mx-y-14m+8=0$

* $\delta(C;t)=r \iff \dfrac{|4m+2-14m+8|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{10} \qquad \Big|\cdot\sqrt{m^2+1}$

$\iff |-10m+10| = 2\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$

$\iff -10m+10 = \pm 2\sqrt{10}\sqrt{m^2+1} \qquad \Big|\ ()^2$

$\iff 100m^2-200m+100 = 4\cdot 10(m^2+1)$

$\iff 100m^2-200m+100 = 40m^2+40$

$\iff 60m^2-200m+60=0$

$$\Leftrightarrow \quad 3m^2 - 10m + 3 = 0 \qquad \Delta = 64$$

$$\Leftrightarrow \quad m_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ on remplace m dans l'équation $mx - y - 14m + 8 = 0$ (trouvée plus haut)

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 42 + 8 = 0 \Leftrightarrow \underline{3x - y - 34 = 0} \Leftrightarrow \underline{y = 3x - 34 \quad (v)} \\ \frac{1}{3}x - y - \frac{14}{3} + 8 = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 14 + 24 = 0 \Leftrightarrow \underline{x - 3y + 10 = 0 \quad (u)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}}$$

variante avec formule : $e_2 - c_2 = m(e_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2+1}$

$$8 + 2 = m(14 - 4) \pm 2\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$$

$$10 = 10m \pm 2\sqrt{10}\sqrt{m^2+1} \qquad \triangle \text{ d'abord isoler } \sqrt{\ }$$

$$10 - 10m = \pm 2\sqrt{10}\sqrt{m^2+1} \qquad |\ (\ )^2$$

... (idem plus haut)

$m = 3 \Rightarrow y = 3x + h$ et $P \in$ tgte $\Rightarrow 8 = 3 \cdot 14 + h \Leftrightarrow h = -34 \Rightarrow y = 3x - 34$ (v)

$m = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + h$ et $P \in$ tgte $\Rightarrow 8 = \frac{1}{3} \cdot 14 + h \Leftrightarrow h = \frac{10}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ (u)

f) $P \in u$ par construction et $U \in u$ car $2 - 3 \cdot 4 + 10 = 2 - 12 + 10 = 0$ ✓

g) le cercle passe par C et P $\Rightarrow$ le centre se trouve sur la <u>médiatrice</u> m_{CP} et il est tangent à UP en P $\Rightarrow$ le centre se trouve sur une <u>perpendiculaire</u> à UP (u) en P.

* $\vec{CP} = \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{CP} : x + y + c = 0$

$M_{CP}\left(\frac{4+14}{2} ; \frac{8-2}{2}\right) = (9;3) \in m_{CP} \Rightarrow 9 + 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = -12$

$\Rightarrow m_{CP} : x + y - 12 = 0$

* $p \perp u \Rightarrow 3x+y+k=0$
  $P \in p \Rightarrow 3\cdot 14+8+k=0 \Leftrightarrow k=-50$ $\Bigg\} \Rightarrow p: 3x+y-50=0$

* B centre du cercle :

$m_{CP} \cap p :$ $\begin{cases} x+y-12=0 & \mid 1 \\ 3x+y-50=0 & \mid -1 \end{cases}$

$-2x+38=0$

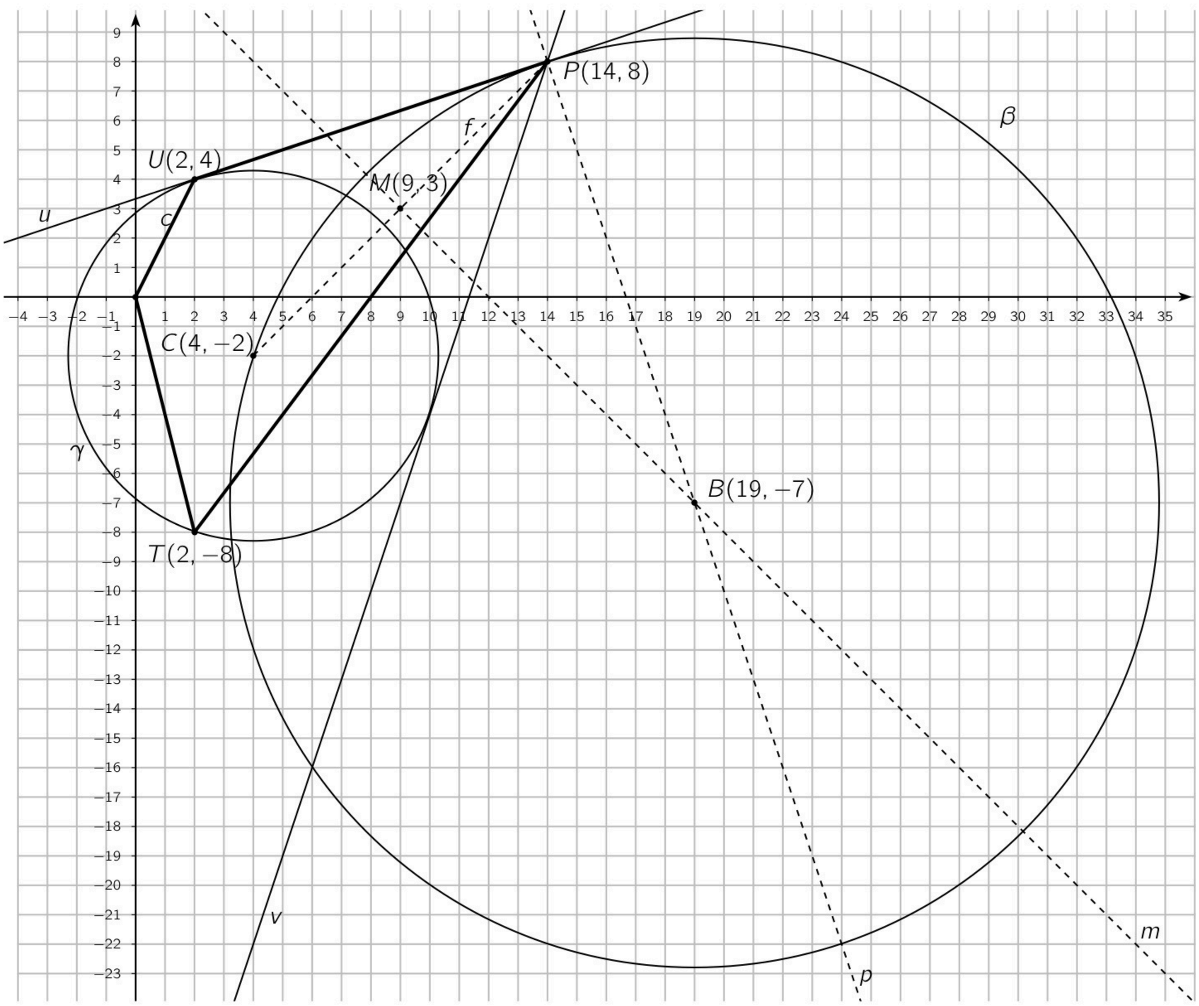
$x=19 \Rightarrow 19+y-12=0 \Leftrightarrow y=-7 \Rightarrow B(19;-7)$

* rayon : $(x-19)^2+(y+7)^2=r^2$

$C \in \beta \Rightarrow (4-19)^2+(-2+7)^2 = 225+25 = 250 = r^2$

variante : $r = \delta(B;C) = \|\overrightarrow{BC}\| = \left\|\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}19\\-7\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-15\\5\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{225+25} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}$

$\Rightarrow \beta : (x-19)^2+(y+7)^2=250$



Juin 2014

$A(-3;0)$ $B(1;-3)$ $E(-4;7)$ $\qquad \gamma_1 : x^2-22x+y^2-4y=0$

a) $x^2-22x+121+y^2-4y+4 = 0+121+4$

$(x-11)^2+(y-2)^2 = 125 \Rightarrow \underline{C(11;2)}$ et $\underline{r=\sqrt{125}=5\sqrt{5}}$

b) $\left.\begin{array}{l}\gamma_2 : (x+3)^2+y^2=r^2 \\ B\in\gamma_2 \Rightarrow (1+3)^2+(-3)^2 = 16+9 = 25 = r^2\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\gamma_2 : (x+3)^2+y^2=25}$

variante : $r=\delta(A;B)=\|\vec{AB}\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{16+9}=5$

c) $\vec{AB}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{AB}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \Rightarrow (AB) : 3x+4y+c=0$

$A\in(AB) \Rightarrow 3\cdot(-3)+4\cdot 0+c=0 \Leftrightarrow c=9 \Rightarrow \underline{(AB) : 3x+4y+9=0}$

d) $B\in\gamma_1 : 1^2-22\cdot 1+(-3)^2-4\cdot(-3) = 1-22+9+12 = 0 \ \checkmark$

$\gamma_1\cap\gamma_2 : \begin{cases} x^2-22x+y^2-4y=0 \\ x^2+6x+9+y^2=25\end{cases} \Leftrightarrow - \begin{cases} x^2-22x+y^2-4y=0 & \big| \ 1 \\ x^2+6x+y^2 = 16 & \big| -1\end{cases}$

$-28x-4y=-16 \quad \big| \div(-4)$

$7x+y=4$

$y=-7x+4$

substitution $\Rightarrow$ dans 2e équ.

$x^2+6x+(-7x+4)^2=16$

$x^2+6x+49x^2-56x+16=16$

$50x^2-50x=0$

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$\Leftrightarrow x = \begin{cases} 0 \Rightarrow y=-7\cdot 0+4=4 \Rightarrow \underline{F(0;4)} \\ 1 \Rightarrow y=-7\cdot 1+4=-3 \Rightarrow B(1;-3)\end{cases}$

e) $E \notin \gamma_1 : (-4)^2 - 22\cdot(-4) + 7^2 - 4\cdot 7 = 16 + 88 + 49 - 28 = 125 \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} * \; t_{1,2} : y = mx + h \Leftrightarrow mx - y + h = 0 \\ \text{et } E \in t_{1,2} \Rightarrow -4m - 7 + h = 0 \Leftrightarrow h = 4m + 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{t_{1,2} : mx - y + 4m + 7 = 0}$$

$* \; \delta(C, t_{1,2}) = r \Leftrightarrow \dfrac{|11m - 2 + 4m + 7|}{\sqrt{m^2 + (-1)}} = 5\sqrt{5} \qquad \Big| \cdot \sqrt{m^2+1}$

$\Leftrightarrow |15m + 5| = 5\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

$\Leftrightarrow 15m + 5 = \pm 5\sqrt{5}\sqrt{m^2+1} \qquad \Big| \div 5$

$\Leftrightarrow 3m + 1 = \pm \sqrt{5}\sqrt{m^2+1} \qquad \Big| \; ()^2$

$\Leftrightarrow 9m^2 + 6m + 1 = 5(m^2+1)$

$\Leftrightarrow 9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 6m - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 + 3m - 2 = 0 \qquad \Delta = 25$

$\Leftrightarrow m_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ on remplace m dans l'équation $mx - y + 4m + 7 = 0$ (trouvée plus haut)

$\Rightarrow \begin{cases} t_1 : \frac{1}{2}x - y + 4\cdot\frac{1}{2} + 7 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - y + 9 = 0 \Leftrightarrow \underline{x - 2y + 18 = 0} \Leftrightarrow \underline{y = \frac{1}{2}x + 9} \\ t_2 : -2x - y + 4\cdot(-2) + 7 = 0 \Leftrightarrow \underline{-2x - y - 1 = 0} \Leftrightarrow \underline{y = -2x - 1} \end{cases}$

variante avec formule : $e_2 - c_2 = m(e_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2+1}$

$7 - 2 = m(-4 - 11) \pm 5\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

$5 = -15m \pm 5\sqrt{5}\sqrt{m^2+1} \qquad \Big| : 5$

$1 = -3m \pm \sqrt{5}\sqrt{m^2+1} \qquad$ ⚠ d'abord isoler $\sqrt{\;}$

$1 + 3m = \pm\sqrt{5}\sqrt{m^2+1} \qquad \Big| \; ()^2$

... (idem plus haut)

$\Rightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + h$ et $E \in t_1 \Rightarrow 7 = \frac{1}{2}(-4) + h \Leftrightarrow h = 9 \Rightarrow \ldots$

$m = -2 \Rightarrow y = -2x + h$ et $E \in t_2 \Rightarrow 7 = -2\cdot(-4) + h \Leftrightarrow h = -1 \Rightarrow \ldots$

f) ABD rectangle en A

Comme $\|\vec{AB}\| \overset{b)}{=} 5$ et Aire $= 25 = \frac{5 \cdot x}{2} \Leftrightarrow x = 10$ avec $\|\vec{AD}\| = x$

$\vec{AD}$ est orthogonal à $\vec{AB}$ et 2 fois plus grand

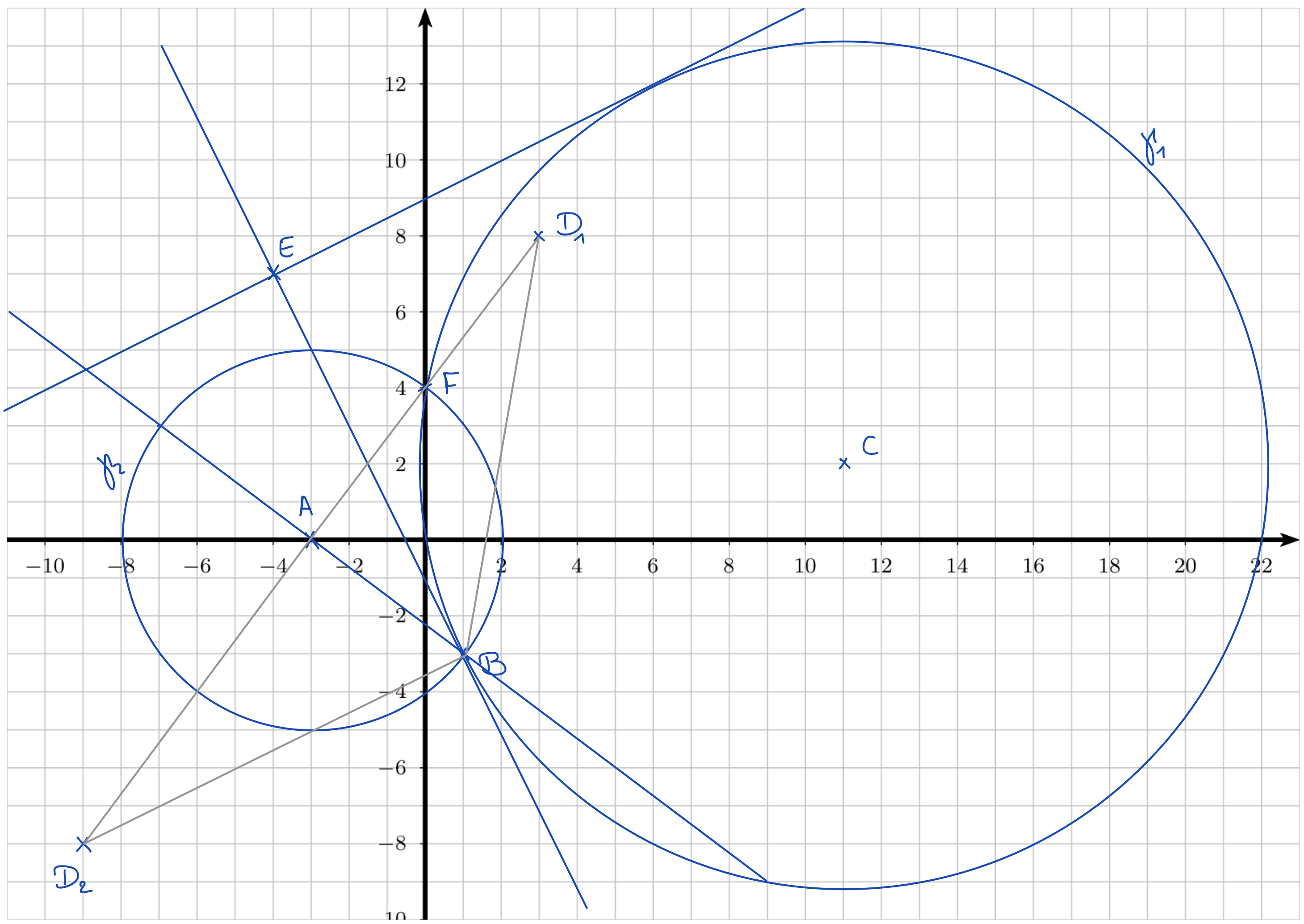
$\Rightarrow \vec{AD} = \pm 2 \vec{n}_{AB} \overset{c)}{=} \pm 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} =$ ou

$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow D_1(3;8)$

$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow D_2(-9;-8)$

1 seule solution demandée !



Juin 2015

$\gamma : (x-7)^2 + (y-4)^2 = 18 \qquad t : x-y-9=0 \qquad d : 7x+y+9=0$

a) $C(7;4)$ et $r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

b) $\delta(C;t) = \dfrac{|7-4-9|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} = r \checkmark$

ou directement (puisqu'ici on demande le point d'intersection)

$$\gamma \cap t : \begin{cases} (x-7)^2 + (y-4)^2 = 18 \\ x-y-9=0 \quad \Leftrightarrow \quad y = x-9 \end{cases}$$

substitution $\Rightarrow$ dans 1e équ.

$$(x-7)^2 + (x-9-4)^2 = 18$$

$$(x-7)^2 + (x-13)^2 = 18$$

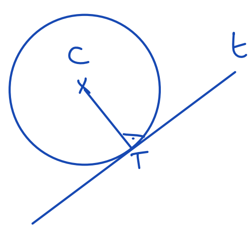
$$x^2 - 14x + 49 + x^2 - 26x + 169 = 18$$

$$2x^2 - 40x + 200 = 0$$

$$x^2 - 20x + 100 = 0$$

$$(x-10)^2 = 0 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = 10-9 = 1 \Rightarrow \underline{T(10;1)}$$

<u>Variante après avoir prouvé que $\delta(C;t) = 3\sqrt{2} = r$</u> et donc que t est tgte à γ.



$T = t \cap (CT)$

$\left.\begin{array}{l} (CT) \perp t \Rightarrow x+y+c=0 \\ C \in (CT) \Rightarrow 7+4+c=0 \Leftrightarrow c=-11 \end{array}\right\} \Rightarrow (CT) : x+y-11=0$

$$+\begin{cases} x-y-9=0 \\ x+y-11=0 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$2x - 20 = 0$$

$$x = 10 \Rightarrow 10-y-9=0 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow T(10;1)$$

c) $s /\!/ t \Rightarrow s: x-y+c=0$

et $\delta(C;s) = r \Leftrightarrow \dfrac{|7-4+c|}{\underbrace{\sqrt{1+(-1)^2}}_{\sqrt{2}}} = 3\sqrt{2} \quad | \cdot \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |3+c| = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 3\cdot 2 = 6$

$\Leftrightarrow 3+c = \pm 6$

$\Leftrightarrow c = \begin{cases} 6-3 = 3 & \Rightarrow \underline{s: x-y+3=0} \\ -6-3 = -9 & \Rightarrow \text{on obtient } t \end{cases}$

Comme C est le milieu de ST, si $S(s_1, s_2)$ on a

$C(7;4) = \left(\dfrac{s_1+10}{2} ; \dfrac{s_2+1}{2}\right) \Rightarrow \underline{S(4;7)}$

d) bissectrices de $t: x-y-9=0$ et $d: 7x+y+9=0$

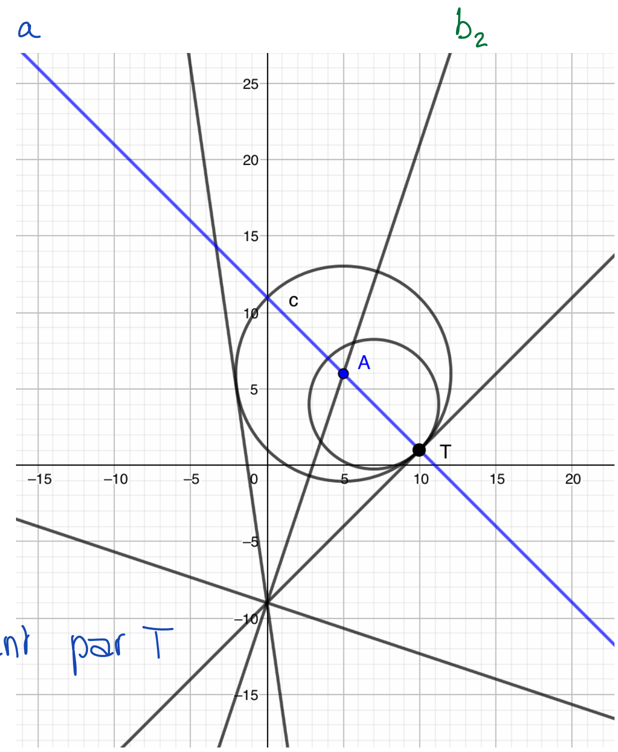
$b_{1,2}: \dfrac{x-y-9}{\sqrt{1^2+1^2}} = \pm \dfrac{7x+y+9}{\sqrt{7^2+1^2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-y-9}{\sqrt{2}} = \pm \dfrac{7x+y+9}{5\sqrt{2}} \quad | \cdot 5\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 5(x-y-9) = \pm (7x+y+9)$

$\Leftrightarrow 5x-5y-45 = \begin{cases} 7x+y+9 & \Leftrightarrow 2x+6y+54=0 \Leftrightarrow \underline{b_1: x+3y+27=0} \\ -7x-y-9 & \Leftrightarrow 12x-4y-36=0 \Leftrightarrow \underline{b_2: 3x-y-12=0} \end{cases}$

e) β est tangent à t et d, donc son centre est sur une des bissectrices, celle de pente positive comme on le voit sur la représentation graphique.



Il s'agit de b_2 dont la pente vaut $m_2 = -\frac{3}{-1} = 3$.

Le centre de β est également sur la droite a perpendiculaire à t passant par T

Déterminons a :

$$\left.\begin{array}{l} a \perp t \Rightarrow a:\ x+y+c=0 \\ T \in a \Rightarrow 10+1+c=0 \\ \qquad\qquad\quad c=-11 \end{array}\right\} \Rightarrow a:\ x+y-11=0$$

$$\Rightarrow \{A\} = b_2 \cap a : \begin{cases} 3x-y = 9 & \mid 1 \\ x+y = 11 & \mid 1 \end{cases}$$
$$4x = 20 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow 5+y=11 \Rightarrow y=6 \Rightarrow A(5;6)$$

$$\Rightarrow \beta:\ (x-5)^2+(y-6)^2 = r^2$$

Comme $T(10;1) \in \beta$: $(10-5)^2+(1-6)^2 = 25+25 = r^2$

variante : $r = \delta(A;T) = \|\vec{AT}\| = \left\|\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \beta:\ (x-5)^2+(y-6)^2 = 50$$

Juin 2017

$A(2;8)\quad B(6;0)\quad C(16;10)\quad D(10;-8)\qquad \gamma: x^2+y^2-20x-14y+104=0$

a) $x^2-20x+100+y^2-14y+49 = -104+100+49$

$(x-10)^2+(y-7)^2 = 45 \implies M(10;7)$ et $r=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

b) $\text{Aire}_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB};\vec{AC})\right| \qquad \vec{AB}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix} \qquad \vec{AC}=\begin{pmatrix}16\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\2\end{pmatrix}$

$\text{Aire}_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}4 & 14\\-8 & 2\end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|4\cdot2-(-8)\cdot14\right| = \frac{1}{2}\cdot120 = 60\ u^2$

c) On va montrer que $\delta(M;(AB)) = r = 3\sqrt{5}$

* $\vec{AB}=\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \implies \vec{n}_{AB}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \implies (AB): 2x+y+c=0$

$A\in(AB) \implies 2\cdot2+8+c=0 \iff c=-12 \implies (AB): 2x+y-12=0$

* $\delta(M;(AB)) = \dfrac{|2\cdot10+7-12|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \dfrac{15}{\sqrt{5}} = \dfrac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5} = r$ ✓

d) $C\in\gamma: 16^2+10^2-20\cdot16-14\cdot10+104 = 256+100-320-140+104=0$ ✓

$t_1 \perp (MC): \vec{MC}=\begin{pmatrix}16\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \implies \vec{n}_{t_1}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \implies t_1: 2x+y+c=0$

$C\in t_1 \implies 2\cdot16+10+c=0 \iff c=-42 \implies t_1: 2x+y-42=0$

variante avec la formule du dédoublement :

$(x-10)^2+(y-7)^2=45 \iff (x-10)(x-10)+(y-7)(y-7)=45$

$\implies (16-10)(x-10)+(10-7)(y-7)=45$

$6(x-10)+3(y-7)=45$

$6x+3y-126=0$

$2x+y-42=0$

e) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{BD} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} = \vec{BD} \Rightarrow$ les vecteurs sont colinéaires $\Rightarrow$ les pts sont alignés.

f) $\delta(M;D) = \|\vec{MD}\| = \left\|\begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{0^2+(-15)^2} = 15 > 3\sqrt{5} \cong 6{,}71$

donc D est extérieur au cercle.

* $t_{2,3} : y = mx+h \Leftrightarrow mx-y+h=0$

$D \in t_{2,3} \Rightarrow 10m+8+h=0 \Leftrightarrow h=-10m-8 \Rightarrow t_{2,3} : mx-y-10m-8=0$

* $\delta(M; t_{2,3}) = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{|10m-7-10m-8|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 3\sqrt{5}$ $\quad | \cdot \sqrt{m^2+1}$

$\Leftrightarrow |-15| = 3\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

$\Leftrightarrow 15 = 3\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$ $\quad | :3$

$\Leftrightarrow 5 = \sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$ $\quad | ()^2$

$\Leftrightarrow 25 = 5(m^2+1)$

$\Leftrightarrow 25 = 5m^2+5$

$\Leftrightarrow 0 = 5m^2-20$

$\Leftrightarrow m^2-4 = 0$

$\Leftrightarrow (m+2)(m-2) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

On remplace m dans l'équation $t_{2,3} : mx-y-10m-8=0$

$t_2 : -2x-y-10(-2)-8=0 \Leftrightarrow -2x-y+12=0$ (c'est la droite (AB))

$t_3 : 2x-y-10\cdot 2-8=0 \Leftrightarrow 2x-y-28=0$

Variante avec formule : $e_2 - c_2 = m(e_1-c_1) \pm r\sqrt{m^2+1}$

$-8-7 = m(10-10) \pm 3\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

$\Leftrightarrow -15 = \pm 3\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

$\Leftrightarrow$ ... idem plus haut ....

g) * le centre K est sur l'axe Ox $\Rightarrow$ $K(k_1;0)$

* le cercle est tangent à (AB) en A $\Rightarrow$ $(KA) \perp (AB)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \ (KA) : \ x-2y+k=0 \\ \text{et } A \in (KA) \Rightarrow \ 2-2\cdot 8+k=0 \Leftrightarrow k=14 \end{array}\right\} \Rightarrow (KA) : \ x-2y+14=0$$

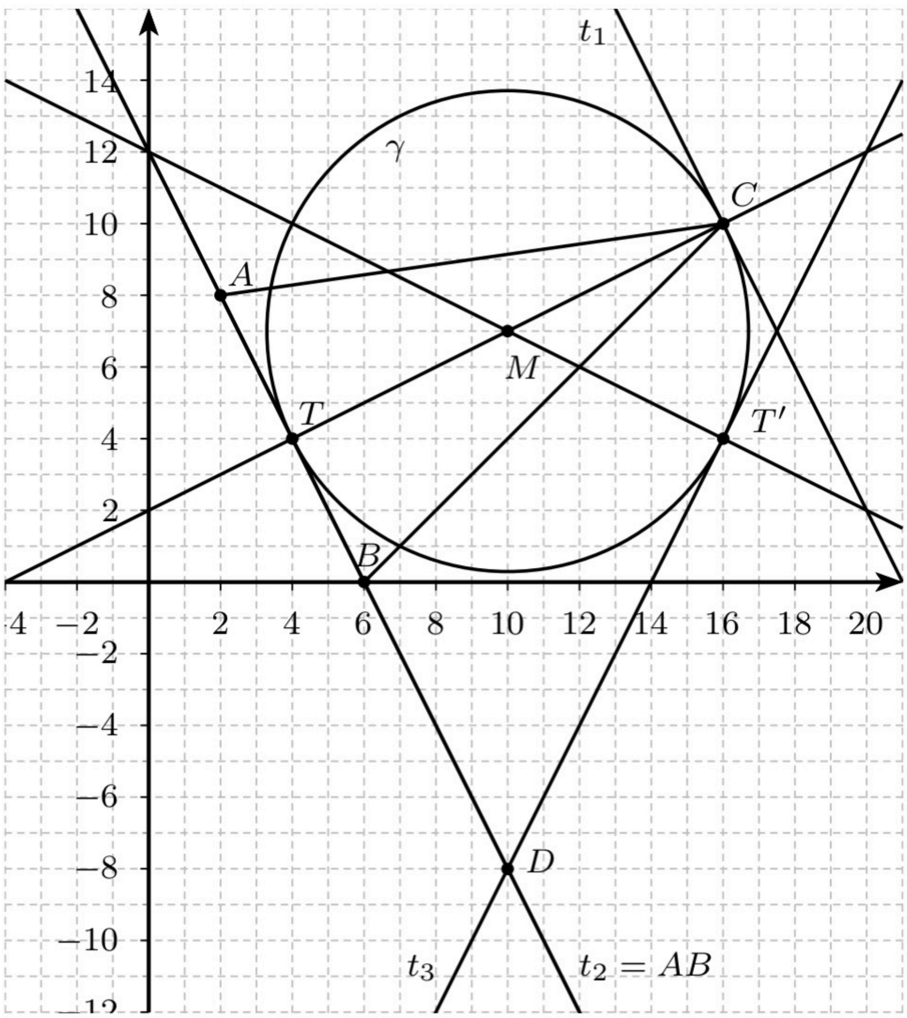
$\Rightarrow$ $K(k_1;0) \in (KA)$ $\Rightarrow$ $k_1-2\cdot 0+14=0 \Leftrightarrow k_1=-14$ $\Rightarrow$ $K(-14;0)$

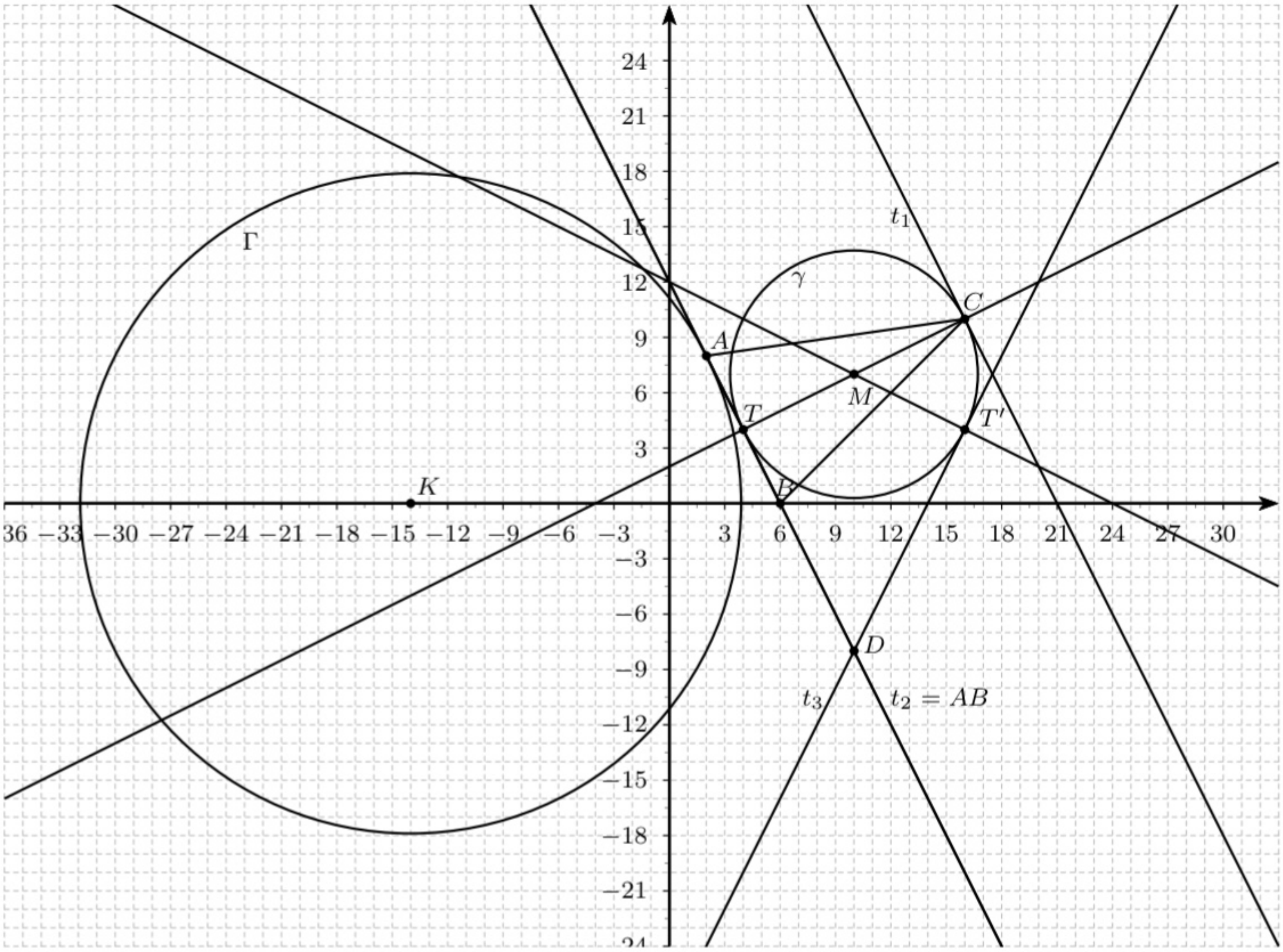
* $(x+14)^2+y^2=r^2$

$A \in \Gamma \Rightarrow (2+14)^2+8^2 = 256+64 = 320 = r^2$

variante $r=\delta(A,K) = \|\overrightarrow{AK}\| = \left\|\begin{pmatrix}-14\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-16\\-8\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{256+64} = \sqrt{320}$

$\Rightarrow$ $\Gamma : (x+14)^2+y^2=320$





Γ
γ
t_1
t_3
$t_2 = AB$
A
B
C
D
K
M
T
T′