2.3 Division euclidienne (Euclide)

Rappel : $6481 \div 15$ on pose :

$$\begin{array}{r|l} 6481 & 15 \\ \cline{2-2} -60 & 432 \\ \cline{1-1} 481 & \\ -45 & \\ \cline{1-1} 31 & \\ -30 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow \quad 6481 \overset{\checkmark}{=} 15 \cdot 432 + 1$

C'est l'égalité fondamentale de la division :

dividende, diviseur, quotient, reste

$$\boxed{D = d \cdot q + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < d}$$

On fait de même pour diviser deux polynômes :

$$(x^3 - 3x^2 + 5x - 1) \div (x^2 - 1)$$

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -3x^2 & +5x & -1 & x^2 - 1 \\ \cline{5-5} -x^3 & & +x & & x - 3 \\ \cline{1-3} & -3x^2 & +6x & -1 & \\ & +3x^2 & & \mp 3 & \\ \cline{2-4} & & 6x & -4 & \end{array}$$

← La division s'arrête lorsque le degré du reste est plus petit que le degré du diviseur.

$\Rightarrow$ Egalité fond. $\quad x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = (x^2-1)(x-3) + 6x - 4$

m.à.s :

1) Diviser le 1e terme du D par le 1e terme du d, on obtient le 1e terme du q.

2) Multiplier le d par le 1e terme du q. trouvé

3) Soustraire le produit trouvé en 2) du D. (additionner l'opposé)

4) Recommencer les étapes 1) 2) et 3) jusqu'à ce que le degré du reste soit inférieur au degré du diviseur.

Exemple :

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -3x^3 & +4x^2 & & +1 & x-2 \\
\cline{6-6}
-2x^4 & +4x^3 & & & & 2x^3+x^2+6x+12 \\
\cline{1-3}
 & x^3 & +4x^2 & & +1 & \\
 & -x^3 & +2x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & 6x^2 & & +1 & \\
 & & -6x^2 & +12x & & \\
\cline{3-4}
 & & & 12x & +1 & \\
 & & & -12x & +24 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 25 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad 2x^4-3x^3+4x^2+1 = (x-2)(2x^3+x^2+6x+12)+25$$

ex 2.3.1 a) b) c) d)

Ex 2.3.1

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 - 8x^2 & + 16x & - 5 & & x-5 \\
\cline{5-5}
-x^3 + 5x^2 & & & & x^2 - 3x + 1 \\
\cline{1-1}
-3x^2 & + 16x & - 5 & & \\
+3x^2 & - 15x & & & \\
\cline{1-2}
& x & - 5 & & \\
& -x & + 5 & & \\
\cline{2-3}
& & 0 & &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad x^3 - 8x^2 + 16x - 5 = (x-5)(x^2 - 3x + 1)$$