Divisibilité par $x-a$

But : factoriser à l'aide de la division

exple : $p = x^3 + 5x^2 - 8x - 48$

> Pour trouver le reste d'une division d'un polynôme par $x-a$
> on remplace x par a dans le polynôme

exple : * le reste de la division de p par $x-1$ est

$$p(1) = 1^3 + 5\cdot 1^2 - 8\cdot 1 - 48 = 1 + 5 - 8 - 48 = -50$$

* le reste ... $x-3$

$$p(3) = 3^3 + 5\cdot 3^2 - 8\cdot 3 - 48 = 27 + 45 - 24 - 48 = 0$$

$\Longrightarrow$ le polynôme est divisible par $x-3$

$\Longrightarrow$ $p = x^3 + 5x^2 - 8x - 48 = (x-3)(x^2+8x+16)$ (égalité fondamentale)

	1	5	-8	-48
3		3	24	48
×	1	8	16	0

p est encore factorisable, en effet $x^2 + 8x + 16 \overset{PR}{=} (x+4)^2$

$\Longrightarrow$ $p = (x-3)(x+4)^2$

Rem : la valeur a (que l'on cherche) est un diviseur du terme constant

Exemples :

1) $p = x^3 - 7x + 6$ diviseurs de 6 candidats : ± 1 ; ± 2 ; ± 3 et ± 6

$p(1) = 1^3 - 7 + 6 = 1 - 7 + 6 = 0$ ✓ $\Rightarrow$ divisible par $x-1$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -7 & 6 \\
1 & & 1 & 1 & -6 \\
\hline
 & 1 & 1 & -6 & \vert\ 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow \; p = (x-1)(x^2 + x - 6) = (x-1)(x+3)(x-2)$

2) $p = 2x^3 + 7x^2 + 8x + 3$ diviseurs de 3 candidats : ± 1 et ± 3

$p(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 3 = -2 + 7 - 8 + 3 = 0$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 7 & 8 & 3 \\
-1 & & -2 & -5 & -3 \\
\hline
 & 2 & 5 & 3 & \vert\ 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow \; p = (x+1)(\underbrace{2x^2 + 5x + 3}) = (x+1)^2(2x+3)$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$

$x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 1}{4} = \begin{cases} -6/4 = -3/2 \\ -4/4 = -1 \end{cases}$ $\Rightarrow \; 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x+1) = (2x+3)(x+1)$