2.1.17 Calculer la valeur de l'angle[1] aigu formé par la droite $3x - y = 1$ et le cercle $(x-2)^2 + y^2 = 5$.

$C(2;0)$ et $r = \sqrt{5}$

- $d \cap \gamma : y = 3x - 1 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 + (3x-1)^2 = 5$
  $\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 6x + 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad 10x^2 - 10x = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x(x-1) = 0$
  $\Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -1,\ y_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad T_1(0;-1),\ T_2(1;2)$

- $\vec{CT_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow t_1 : 2x + y + c = 0$
  $T_1 \in t_1 : 0 - 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$
  $\Rightarrow t_1 : 2x + y + 1 = 0$

  $(t_2 : x - 2y + 3 = 0)$

- $m_d = 3$ et $m_{t_1} = -2 \Rightarrow \tan(\alpha) = \left| \frac{-2-3}{1-6} \right| = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45°$

2.1.18 Calculer l'angle[2] sous lequel se coupent les cercles $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8$ et $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 2$.

- $\gamma_1 : x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 2y + 2 = 0$
  $\gamma_2 : x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$

pts d'intersections :

$$- \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 2y + 2 = 0 & \Big| \; 1 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0 & \Big| \; -1 \end{cases}$$
$$-2x - 6y - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x + 3y + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3y - 2$$

on substitue dans γ_1

$\Rightarrow (-3y-2)^2 + y^2 - 6(-3y-2) - 2y + 2 = 0$
$9y^2 + 12y + 4 + y^2 + 18y + 12 - 2y + 2 = 0$
$10y^2 + 28y + 18 = 0$
$5y^2 + 14y + 9 = 0 \qquad \Delta = 14^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9 = 16$

$y_{1,2} = \frac{-14 \pm 4}{10} = \begin{cases} -1 & \Rightarrow x = -3(-1) - 2 = 1 \Rightarrow A(1;-1) \\ -\frac{9}{5} & \Rightarrow x = -3\left(-\frac{9}{5}\right) - 2 = \frac{17}{5} \Rightarrow B\left(\frac{17}{5}; -\frac{9}{5}\right) \end{cases}$

- t_1 tangente à γ_1 en A :

$\overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{t_1} \Rightarrow t_1 : x+y+c=0$

$A \in t_1 : 1-1+c=0 \Leftrightarrow c=0$

$\Rightarrow t_1 : x+y=0$ et $m_1 = -\frac{1}{1} = -1$

t_2 tangente à γ_2 en A :

$\overrightarrow{AC_2} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}_{t_2} \Rightarrow t_2 : x-y+c=0$

$A \in t_2 : 1+1+c=0 \Leftrightarrow c=-2$

$\Rightarrow t_2 : x-y-2=0$ et $m_2 = -\frac{1}{-1} = 1$

- $\tan(\varphi) = \left| \frac{1-(-1)}{\underbrace{1+(-1)\cdot 1}_{=0}} \right|$ ↯ $\Rightarrow$ l'angle vaut $90°$, en effet $m_1 \cdot m_2 = 1 \cdot (-1) = -1$ $\Leftrightarrow t_1 \perp t_2$

Rem : dans cette deuxième partie d'ex. on n'est pas obligé de déterminer les équations des tangentes. Avec les vecteurs normaux, on peut utiliser la formule :

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|1-1|}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \cos^{-1}(0) = 90°$$

2.1.19 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 + 10x = 2y - 6$, de direction donnée par la droite $2x + y = 7$.

- $\gamma : \quad x^2 + 10x + y^2 - 2y = -6$

  $x^2 + 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = -6 + 25 + 1$

  $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 20 \quad \Rightarrow \quad C(-5;1)$ et $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

- $d : \quad 2x + y - 7 = 0$

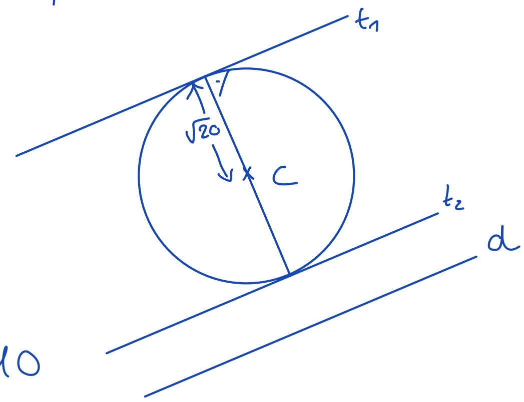
  Comme $t \parallel d \Rightarrow t : 2x + y + c = 0$

  et $\delta(C;t) = r \Leftrightarrow \dfrac{|2(-5) + 1 + c|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{20}$

  $\Leftrightarrow |-9 + c| = \sqrt{100} = 10$

  $\Leftrightarrow -9 + c = \pm 10$

  $\Leftrightarrow c = \begin{cases} 10 + 9 = 19 & \Rightarrow t_1 : 2x + y + 19 = 0 \\ -10 + 9 = -1 & \Rightarrow t_2 : 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$



2.1.20 Former les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, qui sont perpendiculaires à la droite $x = 2y + 345$.

- $\gamma : \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 1 + 4$

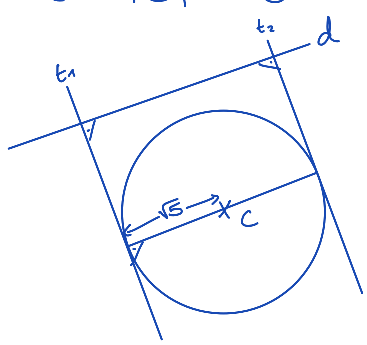
  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad C(1;-2)$ et $r = \sqrt{5}$

- $d : \quad x - 2y - 345 = 0$

  Comme $t \perp d \Rightarrow t : 2x + y + c = 0$

  et $\delta(C;t) = r \Leftrightarrow \dfrac{|2 \cdot 1 + (-2) + c|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |c| = 5 \Leftrightarrow c = \pm 5$

  $\Rightarrow \begin{cases} t_1 : 2x + y + 5 = 0 \\ t_2 : 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$



Ex 2.1.21 $\quad \gamma : x^2+y^2 = 19-2x \quad A(1;6)$

- $(x^2+2x+1) + y^2 = 19+1$

  $(x+1)^2 + y^2 = 20 \quad \Rightarrow \quad C(-1;0)$ et $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

- A est extérieur au cercle :

  $\|\vec{CA}\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{40} > \sqrt{20} = r \quad \checkmark$

- $t : y = mx+h \quad \Leftrightarrow \quad t : mx-y+h=0$

  1) $A(1;6) \in t \Rightarrow m-6+h=0 \Leftrightarrow h = 6-m$

  $\Rightarrow \quad t : mx-y+6-m = 0 \quad (*)$

  2) $\delta(C;t) = \sqrt{20} \Leftrightarrow \dfrac{|-m-0+6-m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{20} \Leftrightarrow \dfrac{|6-2m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{20}$

  $\Leftrightarrow |6-2m| = \sqrt{20}\sqrt{m^2+1} \quad \Big| \, ()^2$

  $(**) \quad \Leftrightarrow (6-2m)^2 = 20(m^2+1)$

  $\Leftrightarrow 36-24m+4m^2 = 20m^2+20$

  $\Leftrightarrow 16m^2+24m-16 = 0$

  $\Leftrightarrow 2m^2+3m-2 = 0 \qquad \Delta = 25$

$\Leftrightarrow \quad m_{1,2} = \dfrac{-3\pm5}{4} = \begin{cases} 1/2 \overset{(*)}{\Rightarrow} t_1 : \frac{1}{2}x-y+\frac{11}{2} = 0 \Leftrightarrow t_1 : x-2y+11=0 \\ -2 \overset{(*)}{\Rightarrow} t_2 : -2x-y+8 = 0 \Leftrightarrow t_2 : 2x+y-8=0 \end{cases}$

Avec formule : $e_2 - c_2 = m(e_1 - c_1) \pm r\sqrt{m^2+1}$ avec $A(e_1; e_2) = A(1;6)$

$$6 - 0 = m\underbrace{(1-(-1))}_{2} \pm \sqrt{20}\sqrt{m^2+1}$$

$$6 - 2m = \pm\sqrt{20}\sqrt{m^2+1} \quad \Big| \; ()^2$$ idem plus haut

(**)

$\vdots$

$$\Leftrightarrow \quad m_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad t_1 : \; y = \frac{1}{2}x + h$ et $A(1;6) \in t_1 \Rightarrow 6 = \frac{1}{2} + h \Leftrightarrow h = \frac{11}{2}$

idem plus haut

$\Rightarrow \quad t_2 : \; y = -2x + h$ et $A(1;6) \in t_2 \Rightarrow 6 = -2 + h \Leftrightarrow h = 8$

idem plus haut

Ex 2.1.22 $\gamma: x^2+y^2-2x+4y = 20$ $A(6;5)$

- $(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4) = 20+1+4$

  $(x-1)^2+(y+2)^2 = 25 \Rightarrow C(1;-2)$ et $r=5$

- A est extérieur au cercle :

  $\|\vec{CA}\| = \left\|\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{35+49} = \sqrt{84} \cong 9,\ldots > 5 = r$ ✓

- avec formule : $e_2-c_2 = m(e_1-c_1) \pm r\sqrt{m^2+1}$ avec $A(e_1;e_2) = A(6;5)$

$$5+2 = m(6-1) \pm 5\sqrt{m^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 7-5m = \pm 5\sqrt{m^2+1} \quad \Big| \; ()^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 49-70m+25m^2 = 25(m^2+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 24 = 70m$$

$$\Leftrightarrow \quad m = \frac{24}{70} = \frac{12}{35}$$

$\Rightarrow t_1: \; y = \frac{12}{35}x + h$ et $A(6;5) \in t \Rightarrow 5 = \frac{12}{35}\cdot 6 + h \Leftrightarrow h = \frac{103}{35}$

$\Rightarrow t_1: \; \frac{12}{35}x - y + \frac{103}{35} = 0 \Leftrightarrow$ $t_1: \; 12x-35y+103 = 0$

La 2e tangente est verticale ! $\Rightarrow$ $t_2: \; x = 6$ car passe par $A(6;5)$

Rem : Il y a toujours <u>2</u> tgtes à un cercle passant par 1 pt. ext.
Lorsqu'on ne trouve qu'une valeur pour m, l'autre tangente est verticale $(m \to \infty)$ d'équation $x = e_1$ avec $E(e_1;e_2)$

ou sans formule :

- $t : y = mx + h \iff \underline{t : mx - y + h = 0}$

1) $A(6;5) \in t \Rightarrow 6m - 5 + h = 0 \iff h = 5 - 6m$

$\Rightarrow \underline{t : mx - y + 5 - 6m = 0}$

2) $\delta(C;t) = \sqrt{20} \iff \dfrac{|m + 2 + 5 - 6m|}{\sqrt{m^2+1}} = 5 \iff \dfrac{|7 - 5m|}{\sqrt{m^2+1}} = 5$

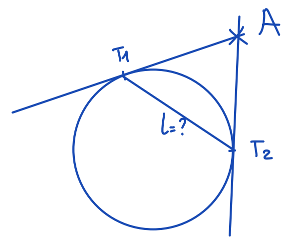
$\iff |7-5m| = 5\sqrt{m^2+1} \quad \Big| \, (\;)^2$

$\iff (7-5m)^2 = 25(m^2+1)$ idem plus haut

$\vdots$

Ex 2.1.24

$A(4;-4)$ et $\gamma: x^2+y^2 = 6x-2y-5$



- $\gamma: x^2-6x+9+y^2+2y+1 = -5+9+1$

  $(x-3)^2+(y+1)^2 = 5 \Rightarrow C(3;-1)$ et $r=\sqrt{5}$

- $\|\vec{AC}\| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} > \sqrt{5} \Rightarrow$ A est ext. au cercle

- On cherche l'équation des tangentes à γ en A (sans formule)

1) $t: y = mx+h$

$A \in t \Rightarrow -4 = 4m+h \Leftrightarrow h = -4-4m$

$\Rightarrow t: y = mx-4-4m$

$\Leftrightarrow mx-y-4-4m = 0$

2) $\delta(C;t) = r \Leftrightarrow \dfrac{|m\cdot 3-(-1)-4-4m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|-m-3|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow |-m-3| = \sqrt{5}\sqrt{m^2+1} \quad |\ ()^2$

$\Leftrightarrow (-m-3)^2 = 5(m^2+1)$

$\Leftrightarrow m^2+6m+9 = 5m^2+5$

$\Leftrightarrow 4m^2-6m-4 = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2-3m-2 = 0 \qquad \Delta = 9-4\cdot 2\cdot(-2) = 25$

$\Leftrightarrow m_{1,2} = \dfrac{3\pm 5}{4} = \begin{cases} 2 \Rightarrow t_1: 2x-y-12 = 0 \\ -\frac{1}{2} \Rightarrow t_2: -\frac{1}{2}x-y-2 = 0 \Leftrightarrow x+2y+4 = 0 \end{cases}$

- $\{T_1\} = t_1 \cap \gamma: \begin{cases} 2x-y-12 = 0 \Rightarrow y = 2x-12 \\ x^2+y^2 = 6x-2y-5 \end{cases}$ on substitue

$\Rightarrow \quad x^2 + (2x-12)^2 = 6x - 2(2x-12) - 5$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x^2 - 48x + 144 = 6x - 4x + 24 - 5$

$\Leftrightarrow \quad 5x^2 - 50x + 125 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 10x + 25 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-5)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 2\cdot 5 - 12 = -2 \quad \Rightarrow \quad \underline{T_1(5;-2)}$

- $\{T_2\} = t_2 \cap \gamma : \begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 = 6x - 2y - 5 \end{cases} \Rightarrow \quad x = -2y - 4$ on substitue

$\Rightarrow \quad (-2y-4)^2 + y^2 = 6(-2y-4) - 2y - 5$

$\Leftrightarrow \quad 4y^2 + 16y + 16 + y^2 = -12y - 24 - 2y - 5$

$\Leftrightarrow \quad 5y^2 + 30y + 45 = 0$

$\Leftrightarrow \quad y^2 + 6y + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (y+3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -3 \quad \Rightarrow \quad x = -2\cdot(-3) - 4 = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{T_2(2;-3)}$

- $l = \|\overrightarrow{T_1T_2}\| = \left\|\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{9+1} = \underline{\sqrt{10}\ u}$