Ex 2.3.1

Comme toutes les fcts sont polynomiales $ED(f) = \mathbb{R}$

\+ Etude de signe :

a) zéro : $\frac{4}{5}$ signe :

x		$4/5$	
$sgn(f)$	$+$	0	$-$

$\left(m = -5 < 0 \searrow\right)$

b) zéros : $x^2 - x - 2 = 0 \iff (\underset{\downarrow 2}{x-2})(\underset{\downarrow -1}{x+1}) = 0$ ou $\Delta = \ldots$

signe :

x		-1		2	
$sgn(f)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\left(a = 1 > 0 \quad \cup\right)$

c) zéros : $(x+4)^2(2+x) = 0 \iff x = -4$ (2) et $x = -2$

signe :

x		-4		-2	
$sgn(f)$	$-$	0 (2)	$-$	0	$+$

$f(1000)$: $+ \cdot + = +$

d) zéros : $-6x^3 + 11x^2 - 3x = 0$

$\iff x(-6x^2 + 11x - 3) = 0$ $\Delta = 49$

$\iff x = 0$ ou $x_{1,2} = \frac{-11 \pm 7}{-12} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} \end{cases}$

signe :

x		0		$1/3$		$3/2$	
$sgn(f)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$f(1000)$: $-$

e) zéros : $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2(x+2) - 4(x+2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x+2)(x^2-4) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x+2)(x+2)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x+2)^2(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad \underset{(2)}{x=-2}$ ou $x = 2$

signe :

x		-2		2	
sgn(f)	$-$	$\underset{(2)}{0}$	$-$	0	$+$

$f(1000)$: $+$

f) zéros : $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

chgmt de variable, on pose $y = x^2$ ⊛

$\Rightarrow \quad y^2 + 5y - 36 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (y+9)(y-4) = 0$

⊛ $\Rightarrow \quad (x^2+9)(x^2-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(x^2+9)}_{>0}(x+2)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = -2$ ou $x = 2$

signe :

x		-2		2	
sgn(f)	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(1000)$: $+$

Ex 2.3.2 ED(f) + signe

a) $f(x) = \dfrac{x(x+4)}{3-2x}$ ← zéros : 0 et -4
← v.i : $3/2$

$ED(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

signe :

x		-4		0		$3/2$	
sgn(f)	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$

↖ $f(1000) : \dfrac{+}{-} = -$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{16 - x^2} = \dfrac{2x}{(4+x)(4-x)}$ ← zéro : 0
← v.i ± 4

$ED(f) = \mathbb{R} - \{\pm 4\}$

signe :

x		-4		0		4	
sgn(f)	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$

↖ $f(1000) : \dfrac{+}{-} = -$

c) $f(x) = \dfrac{(x+2)^2(x+1)}{x^2+x} = \dfrac{(x+2)^2(x+1)}{x(x+1)}$ ← zéros : -2 (2) et -1
← v.i : 0 et -1 → (2)

$ED(f) = \mathbb{R}^* - \{-1\}$

signe :

x		-2		-1		0	
sgn(f)	$-$	0	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$
		(2)		(2)			

↖ $f(1000) : \dfrac{+ \cdot +}{+} = +$

d) $f(x) = x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2 - 1}{x} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x}$ ← zéros : -1 et 1
← v.i. : 0

$ED(f) = \mathbb{R}^*$

signe :

x		-1		0		1	
sgn(f)	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

← $f(1000) : \dfrac{+}{+}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x-5} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{x+1 \; + 3(x-5)}{(x-5)(x+1)} = \dfrac{4x-14}{(x-5)(x+1)} = \dfrac{2(2x-7)}{(x-5)(x+1)}$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-1;5\}$

zéros : $2x-7=0 \iff x = \dfrac{7}{2}$

signe :

x		-1		$7/2$		5	
$sgn(f)$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$

$f(1000) : \dfrac{+}{+}$

f) $f(x) = \dfrac{-5(4-x)^2}{(1-x^2)(2-x)} = \dfrac{-5(4-x)^2}{(1+x)(1-x)(2-x)}$ ← zéro : 4 (2)
← v.i : -1 ; 1 et 2

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-1;1;2\}$

signe :

x		-1		1		2		4	
$sgn(f)$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0 (2)	$-$

$f(1000) : \dfrac{- \cdot +}{- \cdot -} = \dfrac{-}{+} = -$

Ex 2.3.3

a) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

cond : $x^2+x+1 \geq 0$ $\quad \Delta = -3 < 0$ pas de zéro

x	
x^2+x+1	$+$

car $a = 1 > 0$

$ED(f) = \mathbb{R}$

pas de zéro

signe :

x	
sgn(f)	$+$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-5}$

cond : $x-1 \geq 0$ et $x-5 \geq 0$

$\underbrace{x \geq 1 \text{ et } x \geq 5}$

$\Rightarrow x \geq 5$

$ED(f) = [5;+\infty[$

zéro : $x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \notin ED(f)$

$x-5=0 \Leftrightarrow x=5 \in ED(f)$

signe :

x		5	
sgn(f)	///	0	$+$

c) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-5)}$

cond : $(x-1)(x-5) \geq 0$

x		1		5	
$(x-1)(x+5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$ED(f) =]-\infty;1] \cup [5;+\infty[$

zéros : $\sqrt{(x-1)(x-5)} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=5$

signe :

x		1		5	
sgn(f)	$+$	0	///	0	$+$

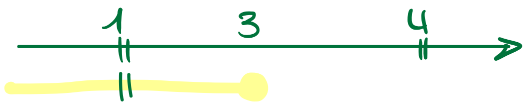
d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{6-2x}}{x^2-5x+4} = \dfrac{\sqrt{2(3-x)}}{(x-1)(x-4)}$ ✓ zéro

V.I. 1 et 4

cond : $2(3-x) \geqslant 0$ et $x \neq 1$ et $x \neq 4$

$3-x \geqslant 0$

$3 \geqslant x$



$\Rightarrow ED(f) =]-\infty ; 3] - \{1\}$

zéro de f : $\sqrt{6-2x} = 0 \Leftrightarrow 6-2x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

signe :

x		1		3	
Sgn(f)	+	‖	−	0	//////

$f(0) = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$: +

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-4}}$ cond : $\dfrac{x+1}{x-4} \geqslant 0$

x		−1		4	
$\frac{x+1}{x+4}$	+	0	−	‖	+

$\Rightarrow ED(f) =]-\infty ; -1] \cup]4 ; +\infty[$

zéro de f : $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+4}} = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

signe de f :

x		−4		−1	
	+	‖	//////	0	+

f) $f(x) = \dfrac{x^2+7x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x(x+7)}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}$ cond : $\underbrace{1-x^2 \geqslant 0 \text{ et } \sqrt{1-x^2} \neq 0}_{1-x^2 > 0}$

x		−1		1	
$1-x^2$	−	0	+	0	−

$\Rightarrow ED(f) =]-1 ; 1[$

zéro de f : $x(x+7) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -7$

$x = 0 \in ED(f)$; $x = -7 \notin ED(f)$

signe de f :

x		−1		0		1	
f	////	‖	−	0	+	‖	////

$f(-0{,}5)$: $\dfrac{0{,}25 - 3{,}5}{+} < 0$

Ex 2.3.5

a) $f(x) = \ln(7-2x)$

cond : $7-2x > 0$ $\downarrow$ $\frac{7}{2}$

	$7/2$	
$+$	0	$-$

$\Rightarrow$ $ED(f) = \left]-\infty ; \frac{7}{2}\right[$

b) $f(x) = e^{x-1}$ $\quad ED(f) = \mathbb{R}$ car aucune opération interdite

c) $f(x) = \dfrac{3-x}{1-\log(x)}$

cond : $1-\log(x) \neq 0$ et $x>0$

$1 \neq \log(x)$

$10 \neq x$

$\Rightarrow$ $ED(f) = \mathbb{R}_+^* - \{10\}$ $= \left]0;10\right[\cup \left]10;+\infty\right[$

d) $f(x) = 3^{\frac{1}{x+2}}$

cond : $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

e) $f(x) = \log_2\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)$

cond : $\dfrac{2+x}{3-x} > 0$

x		-2		3	
$\text{sgn}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$

$ED(f) = \left]-2;3\right[$

f) $f(x) = 10^{-x}$ $\quad ED(f) = \mathbb{R}$ car aucune opération interdite

Ex 2.3.6

a) $f(x)=3$ $\quad g(x)=x^2$ $\qquad ED(f)=\mathbb{R}$ $\quad ED(g)=\mathbb{R}$

$(f+g)(x)=3+x^2$ $\quad ED(f+g)=\mathbb{R}$ $\qquad (f-g)(x)=3-x^2$ $\quad ED(f-g)=\mathbb{R}$

$(f\cdot g)(x)=3x^2$ $\quad ED(f\cdot g)=\mathbb{R}$ $\qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{3}{x^2}$ $\quad ED\left(\frac{f}{g}\right)=\mathbb{R}^*$

b) $f(x)=\frac{2x}{x-4}$ $\qquad ED(f)=\mathbb{R}-\{4\}$

$g(x)=\frac{x}{x+5}$ $\qquad ED(g)=\mathbb{R}-\{-5\}$

$(f+g)(x)=\frac{2x}{x-4}+\frac{x}{x+5}=\dots=\frac{3x^2+6x}{(x-4)(x+5)}$ $\qquad ED(f+g)=\mathbb{R}-\{-5;4\}$

$(f-g)(x)=\frac{2x}{x-4}-\frac{x}{x+5}=\dots=\frac{x^2+14x}{(x-4)(x+5)}$ $\qquad ED(f-g)=$ "

$(f\cdot g)(x)=\frac{2x}{x-4}\cdot\frac{x}{x+5}=\frac{2x^2}{(x-4)(x+5)}$ $\qquad ED(f\cdot g)=$ "

zéro de g

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\frac{2x}{x-4}}{\frac{x}{x+5}}=\frac{2x}{x-4}\cdot\frac{x+5}{x}=\frac{2x(x+5)}{x(x-4)}$ $\qquad ED\left(\frac{f}{g}\right)=\mathbb{R}^*-\{-5;4\}$

c) $f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad ED(f)=\mathbb{R}_+$

$g(x)=\sqrt{4x}$ $\qquad ED(g)=\mathbb{R}_+$

$(f+g)(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4x}=\sqrt{x}+2\sqrt{x}=3\sqrt{x}$ $\qquad ED(f+g)=\mathbb{R}_+$

$(f-g)(x)=\sqrt{x}-\sqrt{4x}=\sqrt{x}-2\sqrt{x}=-\sqrt{x}$ $\qquad ED(f-g)=$ "

$(f\cdot g)(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{4x}=\sqrt{4x^2}=2x$ $\qquad ED(f\cdot g)=$ "

zéro de g

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x}}=\sqrt{\frac{x}{4x}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ $\qquad ED\left(\frac{f}{g}\right)=\mathbb{R}_+^*$

d) $f(x) = \ln(x)$ $\quad ED(f) = \mathbb{R}_+^*$

$g(x) = \ln(1-x)$ $\quad ED(g) =]-\infty;1[$ $\quad$ car $1-x>0 \Leftrightarrow 1>x$

$(f+g)(x) = \ln(x) + \ln(1-x) = \ln(x-x^2)$ $\quad ED(f+g) =]0;1[$

$(f-g)(x) = \ln(x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ $\quad ED(f-g) =]0;1[$

$(f \cdot g)(x) = \ln(x) \cdot \ln(1-x)$ $\quad ED(f \cdot g) =]0;1[$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(1-x)}$ $\quad$ cond: $\ln(1-x) \neq 0$
$1-x \neq 1$
$x \neq 0$

$ED\left(\frac{f}{g}\right) =]0;1[$

Ex 2.3.7

$f(x) = 2x$ $\quad g(x) = 2x-1$ $\quad h(x) = x^2$ $\quad ED = \mathbb{R}$

a) $(f \circ g)(x) = f(\cancel{g(x)}) = f(2x-1) = 2(2x-1) = 4x-2$

b) $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(f(x)) = h(2x) = (2x)^2 = 4x^2$

c) $(g \circ h \circ f)(x) = g(h(f(x))) = g(h(2x)) = g(4x^2) = 2(4x^2)-1 = 8x^2-1$

Ex 2.3.8

a) $f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = \sqrt{x+2} \qquad ED(f) = \mathbb{R} \qquad ED(g) = [-2;+\infty[$

- $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+2}) = (\sqrt{x+2})^2 - 3\sqrt{x+2} = \underline{x+2-3\sqrt{x+2}}$

  $x \in ED(g)$ $\qquad$ $\sqrt{x+2} \in ED(f) = \mathbb{R}$ ✓

  $\underline{ED(f\circ g) = [-2;+\infty[}$

- $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2-3x) = \underline{\sqrt{x^2-3x+2}}$

  $x \in ED(f)$

  ED : et $x^2-3x \in ED(g) \Rightarrow x^2-3x \geq -2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow$

  $(x-2)(x-1) \geq 0$

  $+ \quad 1 \quad - \quad 2 \quad +$ $\qquad \Rightarrow \underline{ED(g\circ f) =]-\infty;1] \cup [2;+\infty[}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{3x+2}$ et $g(x) = \dfrac{2}{x} \qquad ED(f) = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{2}{3}\right\} \qquad ED(g) = \mathbb{R}^*$

- $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{\frac{2}{x}}{3\cdot\frac{2}{x}+2} = \dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{x}{6+2x} = \underline{\dfrac{1}{3+x}}$

  ED : $x \in ED(g)$ et $\dfrac{2}{x} \in ED(f) \Leftrightarrow \dfrac{2}{x} \neq -\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x \neq -3$

  $\Rightarrow \underline{ED(f\circ g) = \mathbb{R}^* - \{-3\}}$

- $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{x}{3x+2}\right) = \dfrac{2}{\frac{x}{3x+2}} = \dfrac{2(3x+2)}{x} = \underline{\dfrac{6x+4}{x}}$

  ED : $x \in ED(f)$ et $\dfrac{x}{3x+2} \in ED(g) \Leftrightarrow \dfrac{x}{3x+2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

  $\Rightarrow \underline{ED(g\circ f) = \mathbb{R}^* - \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}}$