Ex 2.1.14

$d_1 : \quad 4x-3y-10=0$

$\Leftrightarrow \quad y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$

$d_2 : \quad 3x-4y-5=0$

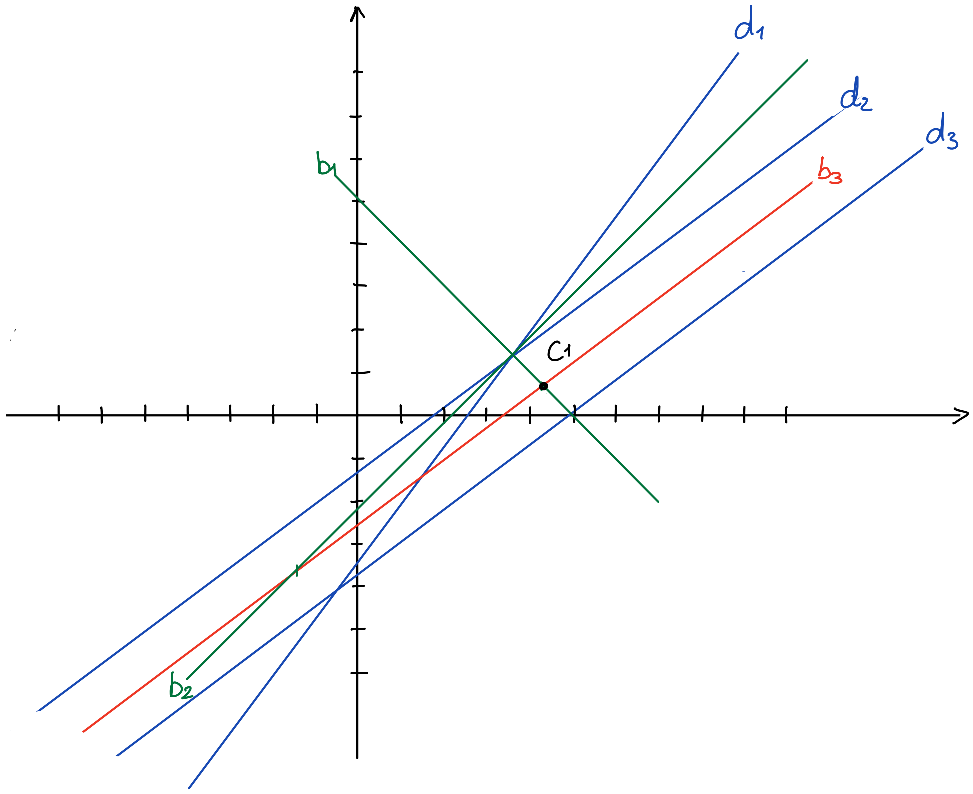
$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$

$d_3 : \quad 3x-4y-15=0$

$y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4}$

$C(4{,}3\,;\,0{,}7)$

$C'(-1{,}4\,;\,-3{,}6)$



On cherche un cercle tangent à trois droites, le centre est donc à l'intersection des bissectrices.

* bissectrices de d_1 et d_2 :

$$\frac{4x-3y-10}{\underbrace{\sqrt{4^2+(-3)^2}}_{5}} = \pm \frac{3x-4y-5}{\underbrace{\sqrt{3+(-4)^2}}_{5}} \quad \Big| \cdot 5$$

$$4x-3y-10 = \pm(3x-4y-5)$$

$\oplus$: $4x-3y-10 = 3x-4y-5$

$b_1 : \quad x+y-5=0$

$\ominus$: $4x-3y-10 = -3x+4y+5$

$b_2 : \quad 7x-7y-15=0$

* bissectrices de d_2 et d_3 :

$$\frac{3x-4y-5}{\underbrace{\sqrt{3^2+(-4)^2}}_{5}} = \pm \frac{3x-4y-15}{\underbrace{\sqrt{3^2+(-4)^2}}_{5}} \quad \Big| \cdot 5$$

$$3x-4y-5 = \pm(3x-4y-15)$$

$\oplus$: $3x-4y-5 = 3x-4y-15$

$10 = 0$ ↯

$\ominus$: $3x-4y-5 = -3x+4y+15$

$6x-8y-20=0$

$b_3 : \quad 3x-4y-10=0$

les droites d_1 et d_2 étant parallèles il n'y a qu'une seule bissectrice // à d_1 et d_2 et qui se trouve au milieu des deux dtes donc $c = \frac{c_1+c_2}{2}$ (a et b identiques car //)

Il y a deux cercles et les centres se trouvent à l'intersection de $b_1 \cap b_3$ et de $b_2 \cap b_3$ (comme on le voit sur le graphique)

* $b_1 \cap b_3$: $\begin{cases} x+y-5=0 \\ 3x-4y-10=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 4 \\ 1 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow + \begin{array}{r} 4x+4y-20=0 \\ 3x-4y-10=0 \\ \hline 7x \quad -30=0 \end{array}$$

$$x = \frac{30}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{30}{7}+y-5=0$$

$$y = 5-\frac{30}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow C_1\left(\frac{30}{7}; \frac{5}{7}\right)$$

$$r_1 = \delta(C_1; d_1) = \frac{\left|4\cdot\frac{30}{7} - 3\cdot\frac{5}{7} - 10\right|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \gamma_1 : \left(x-\frac{30}{7}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{7}\right)^2 = 1$$

* $b_2 \cap b_3$: $\begin{cases} 7x-7y-15=0 \\ 3x-4y-10=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} -3 \\ 7 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow + \begin{array}{r} -21x+21y+45=0 \\ 21x-28y-70=0 \\ \hline -7y-25=0 \end{array}$$

$$y = -\frac{25}{7}$$

$$\Rightarrow 3x-4\cdot\left(-\frac{25}{7}\right)-10=0$$

$$3x = -\frac{100}{7}+10 = -\frac{30}{7}$$

$$x = -\frac{10}{7}$$

$$\Rightarrow C_2\left(-\frac{10}{7}; -\frac{25}{7}\right)$$

$$r_2 = \delta(C_2; d_1) = \frac{\left|4\cdot\left(-\frac{10}{7}\right) - 3\cdot\left(-\frac{25}{7}\right) - 10\right|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \gamma_2 : \left(x+\frac{10}{7}\right)^2 + \left(y+\frac{25}{7}\right)^2 = 1$$