Exponentielles et logarithmes

1. Rappels

Définition 1.
Le **logarithme** en base a d'un nombre u, est la puissance à laquelle on élève a pour obtenir u avec a et u des nombres positifs, non nuls et a différent de 1. On le note $\log_a(u)$. Autrement dit :

$$\boxed{\log_a(u) = x \;\Leftrightarrow\; a^x = u \qquad \text{avec } u \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}}$$

Convention d'écriture : $\log_{10}(u) = \log(u)$ et $\log_e(u) = \ln(u)$

Exemples :

a) $\log_2(16) = 4$

b) $\log(100) = 2$

c) $\ln(e^2) = 2$

d) $\log_{12}(1) = 0$

e) $\log_9(3) = \frac{1}{2}$ car $9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$

f) $\log_5(\frac{1}{625}) = -4$ car $5^{-4} = \frac{1}{625}$

Propriétés :

1. $\log_a(a^x) = x$
2. $a^{\log_a(u)} = u$
3. $\log_a(uv) = \log_a(u) + \log_a(v)$
4. $\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a(u) - \log_a(v)$
5. $\log_a(u^r) = r \cdot \log_a(u)$
6. $\log_a(u) = \log_a(v) \;\Leftrightarrow\; u = v$

Formule du changement de base : $\quad \log_a(u) = \dfrac{\log(u)}{\log(a)} = \dfrac{\ln(u)}{\ln(a)}$

Équations exponentielles

On essaie d'isoler l'exponentielle pour appliquer $\log_a$ des deux côtés de l'équation et la propriété 1.

Exemple : $\mathrm{e}^{x+1} - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \quad e^{x+1} = 5 \quad | \ln(\;)$

$\Leftrightarrow \quad \ln(e^{x+1}) = \ln(5)$

$\overset{1.}{\Leftrightarrow} \quad x+1 = \ln(5)$

$\Leftrightarrow \quad x = \ln(5) - 1 \quad \Rightarrow \quad S = \{\ln(5) - 1\}$

Équations logarithmiques

On essaie d'isoler le logarithme pour appliquer $\exp_a$ (" $a^{(\ )}$ ") des deux côtés de l'équation et la propriété 2. Les propriétés 3, 4 et 5 sont parfois utiles pour y arriver.
Il faut ensuite vérifier les solutions obtenues dans l'équation de départ car $\log_a(u)$ est défini que si $u > 0$.

Exemples :

a) $\log_2(x^2 - 3) = 0 \quad | \ 2^{(\ )}$

$$2^{\log_2(x^2-3)} = 2^0$$
$$x^2 - 3 = 1$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x+2)(x-2) = 0$$
$$-2 \qquad 2$$

vérif : $\log_2(\underbrace{4-3}_{>0}) = \log_2(1) = 0 \checkmark$ avec $x=2$

$\log_2(4-3) = \ldots \checkmark$ avec $x=-2$

$\Rightarrow S = \{-2 ; 2\}$

b) $2\ln(7x - 3) - 1 = 4$

$$2\ln(7x-3) = 5$$
$$\ln(7x-3) = \frac{5}{2} \quad | \ e^{(\ )}$$
$$7x - 3 = e^{5/2}$$
$$7x = e^{5/2} + 3$$
$$x = \frac{e^{5/2}+3}{7} = \frac{\sqrt{e^5}+3}{7}$$

vérif : $2\ln(\underbrace{e^{5/2}}_{>0}) - 1 = 2 \cdot \frac{5}{2} - 1 = 4 \checkmark$

$S = \left\{ \frac{e^{5/2}+3}{7} \right\}$

c) $\log(3x - 4) + \log(10x - 4) = 2\log(5x - 2)$

$$\Leftrightarrow \log((3x-4)\cdot(10x-4)) = \log((5x-2)^2) \quad | \ 10^{(\ )}$$
$$\Leftrightarrow (3x-4)(10x-4) = (5x-2)^2$$
$$\Leftrightarrow 30x^2 - 52x + 16 = 25x^2 - 20x + 4$$
$$\Leftrightarrow 5x^2 - 32x + 12 = 0 \qquad \Delta = 784 = 28^2$$
$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{32 \pm 28}{10} = \begin{cases} 6 \\ 2/5 \end{cases}$$

vérif : * $x = 6$

$\log(14) + \log(56) = 2\log(28) \checkmark$

* $x = 2/5$

$\log(\underbrace{\tfrac{6}{5} - 4}_{-\frac{14}{5} < 0})$ ↯

$\Rightarrow S = \{6\}$

d) $\ln\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right) = 0 \quad | \ e^{(\ )}$

$$\frac{x+3}{x+2} = e^0 = 1$$
$$x + 3 = x + 2$$
$$3 \neq 2 \quad ↯$$

$\Rightarrow S = \emptyset$