2. Les fonctions exponentielle et logarithme

Définition 2.
On appelle **fonction exponentielle de base a** avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, la fonction :

$$\begin{array}{rcrcl} \exp_a & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & & x & \mapsto & \exp_a(x) = a^x \end{array}$$

Définition 3.
On appelle **fonction logarithme de base a** avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, la fonction :

$$\begin{array}{rcrcl} \log_a & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \log_a(x) \end{array}$$

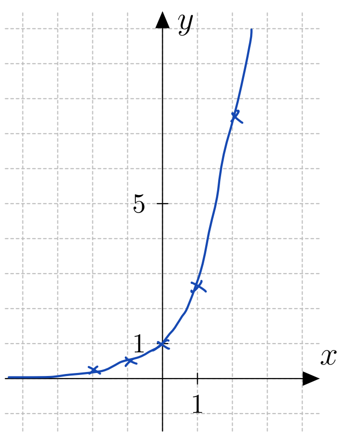
Pour la suite de ce cours nous allons nous intéresser plus particulièrement aux fonctions exponentielles et logarithmes de base e notées :

$$f(x) = e^x \qquad \text{et} \qquad f(x) = \ln(x)$$

Remarque :
On obtient une valeur approchée de e avec les touches $\boxed{1}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{LN}}$

La fonction $f(x) = e^x$

x	e^x
-2	0,1
-1	0,4
0	1
1	2,7
2	7,4
3	20,1



Ensemble de définition : $ED(f) = \mathbb{R}$

Zéros : aucun

Signe : tjrs positif.

Exemple :

Déterminer l'ED, les zéros et les signes de

a) $f(x) = e^{1/x}$

$ED(f) = \mathbb{R}^*$, zéro : aucun signe : tjrs positif.

b) $f(x) = 3 - e^{x-2}$

$ED(f) = \mathbb{R}$

zéro : $3 - e^{x-2} = 0 \iff e^{x-2} = 3 \iff x-2 = \ln(3) \iff x = \ln(3)+2$
$\cong 3,1$

signe :

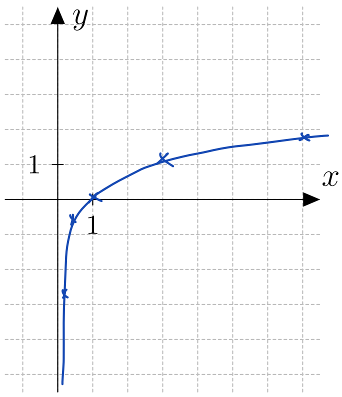
x		$\ln(3)+2$	
sgn(f)	+	0	−

$f(0) \cong 2,9$ $f(4) \cong -4,4$

⚠ évaluer le signe dans chaque intervalle.

La fonction logarithme $f(x) = \ln(x)$

x	$\ln(x)$
-1	/
0	/
0.1	$-2,3$
$0,5$	$-0,7$
1	0
3	$1,1$
7	$1,9$



Ensemble de définition : $\mathbb{R}_+^*$

Zéros : 1

Signe :

x		1	
$\ln(x)$	$-$	0	$+$

Exemple :

Déterminer l'ED, les zéros et les signes de

a) $f(x) = \dfrac{\ln(3-x)}{x}$

cond : $3-x > 0$ et $x \neq 0$

$3 > x$ et $x \neq 0$

$ED(f) =]-\infty ; 0[\cup]0 ; 3[$

zéro : $\ln(3-x) = 0 \Leftrightarrow 3-x = 1 \Leftrightarrow x = 2 \in ED(f)$

signe :

x		0		2		
$f(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|///$

$f(-1) \cong -1,4$ $f(1) \cong 0,7$ $f(2,5) \cong -0,3$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-4}{2x-1}\right)$

cond : $\dfrac{x^2-4}{2x-1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)(x-2)}{2x-1} > 0$

x		-2		$1/2$		2	
$\frac{x^2-4}{2x-1}$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

$ED(f) =]-2 ; \frac{1}{2}[\cup]2 ; +\infty[$

zéro : $\dfrac{x^2-4}{2x-1} = 1 \Leftrightarrow x^2-4 = 2x-1 \Leftrightarrow x^2-2x-3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0$

$\downarrow \quad \downarrow$

$3 \quad -1$

sgn :

x		-2		-1		$1/2$		2		3	
$f(x)$	$///$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$////$	$\|\|$	$-$	0	$+$

$f(-1,5) \cong -0,8$ $f(0) \cong 1,4$ $f(2,5) \cong -0,6$ $f(4) \cong 0,5$