2.6 Limites

But : déterminer le comportement du graphe d'une fonction au voisinage d'un "trou" ou d'un "bord" de son ensemble de définition, également à "$-\infty$" et à "$+\infty$".

Exemple : $f(x) = \dfrac{3(1-x)}{(\sqrt{x}-1)(x-4)}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R}_+ - \{1;4\}$

On veut étudier f

1) en $x = 0$ (bord) : $f(0) = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ $(0;\frac{3}{4}) \in$ graphe de f.
2) près de $x = 1$ (v.i)
3) " $x = 4$ (v.i)
4) lorsque x s'approche de $+\infty$

2)

	x	$f(x)$
à gauche $x<1$	0,9	1,89
	0,99	1,99
	0,999	1,999
	1	indéfini
à droite $x>1$	1,001	2,001
	1,01	2,012
	1,1	2,12

$\Rightarrow$ "trou" $(1;2)$

3)

	x	$f(x)$
à gauche de 4 $x<4$	3,9	89,25
	3,99	899,25
	3,999	8999,25
	4	indéfini
à droite de 4 $x>4$	4,001	$-9000{,}75$
	4,01	$-900{,}75$
	4,1	$-90{,}75$

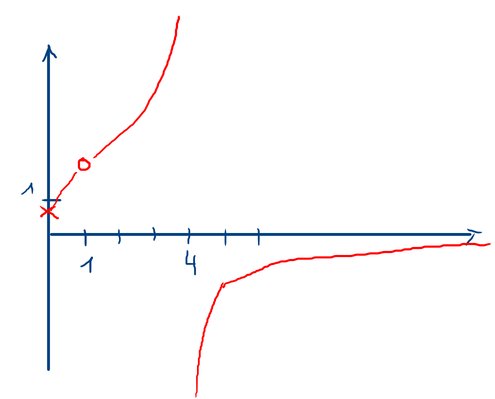
$f(x)$ tend vers $+\infty$

$f(x)$ tend vers $-\infty$

4)

x	$f(x)$
1000	$-0{,}09$
10'000	$-0{,}03$
100'000	$-0{,}0095$
⋮	

$f(x)$ s'approche de 0



Définition

intuitive

On note f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf éventuellement en a.

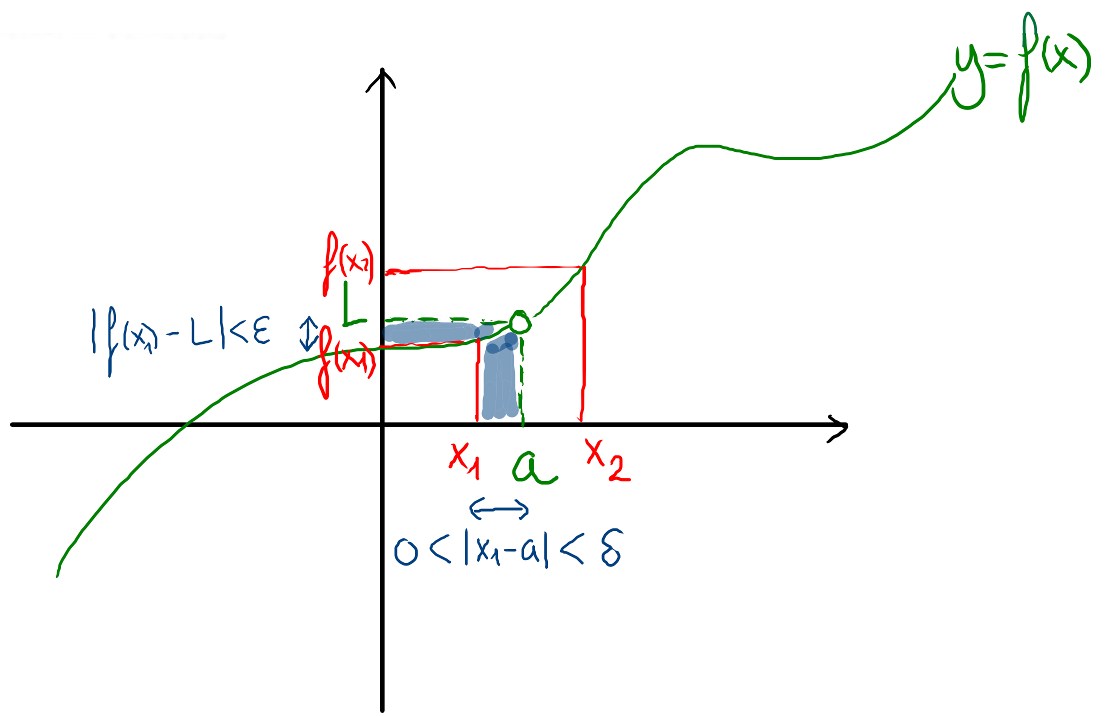
Le nombre L est la *limite de f en a* si $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment proche de a $(x \neq a)$.

On dit aussi que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers a. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

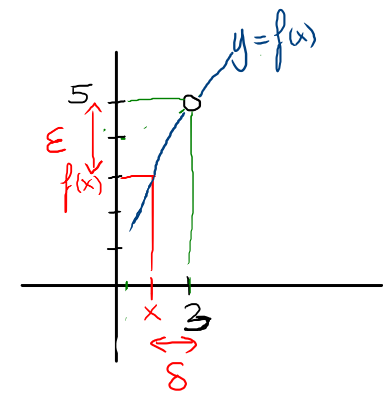
math.

Formellement, le nombre L est la limite de f en a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

formulaire CRM p.76



Exples : 1) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x-3}$ pas définie en $x=3$



Montrons que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$

Calculons $|f(x) - 5| = \left| \dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x-3} - 5 \right| = \left| \dfrac{2x^2 - 7x + 3 - 5x + 15}{x-3} \right|$

$= \left| \dfrac{2x^2 - 12x + 18}{x-3} \right| = \left| \dfrac{2\overbrace{(x^2 - 6x + 9)}^{(x-3)^2}}{x-3} \right| = |2(x-3)| = 2|x-3|$

Ainsi $f(x)$ est infiniment proche de 5 si x est suffisamment proche de 3

Formellement en choisissant $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, on a

$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow 0 < 2|x-3| < 2\delta = \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$ #

Exercice de même montrer que

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 6x}{x-2} = 6$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - 2x}{x} = -2$