# Limites à l'infini

**Déf** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} f\left(\frac{1}{t}\right) = L$ pour une fonction $f$ définie sur $[a ; +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

$]-\infty ; a]$

**Exple :**

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+3x}{x^2+1} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{f.i.}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2+0}{1+0} = 2$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2+3x}{x^2+1} = \dots = 2$

b) $\lim_{x \to \pm\infty} (x^3 - x^2 + 2x) \overset{\infty - \infty + \infty}{=} \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = +\infty(1-0+0) = +\infty$

**Ex 2.6.16**

$\lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^2+1}{x+2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^{\cancel{2}}\left(-3+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{-\infty \cdot (-3+0)}{(1+0)} = +\infty$

ou

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = -3 \cdot (-\infty) = +\infty$

(form. p. 15 Bunen)

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}}$$

Ne dépend que du terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur

# Fonctions irrationnelles

Exple : $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{4x^2 - 8x} + 2x$

$ED(f) = \left]-\infty ; 0\right] \cup \left[2 ; +\infty\right[$

$4x^2 - 8x \geqslant 0$

$4x(x-2) \geqslant 0$

$0 \qquad 2$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 - 8x} + 2x = +\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{4x^2 - 8x} + 2x = +\infty + (-\infty) \quad \text{f.i.}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2 - 8x} + 2x\right)\left(\sqrt{4x^2 - 8x} - 2x\right)}{\sqrt{4x^2 - 8x} - 2x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{4x^2} - 8x - \cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2 - 8x} - 2x} = \text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"} \quad \text{f.i.}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-8x}{\sqrt{4x^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{x}\right)} - 2x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-8x}{\underbrace{|2x|}_{-2x} \sqrt{1 - \frac{2}{x}} - 2x}$$

car $x<0$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{-8x}^{\,4}}{\cancel{-2x}\left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1\right)} = \frac{4}{\sqrt{1-0} + 1} = \frac{4}{2} = 2$$