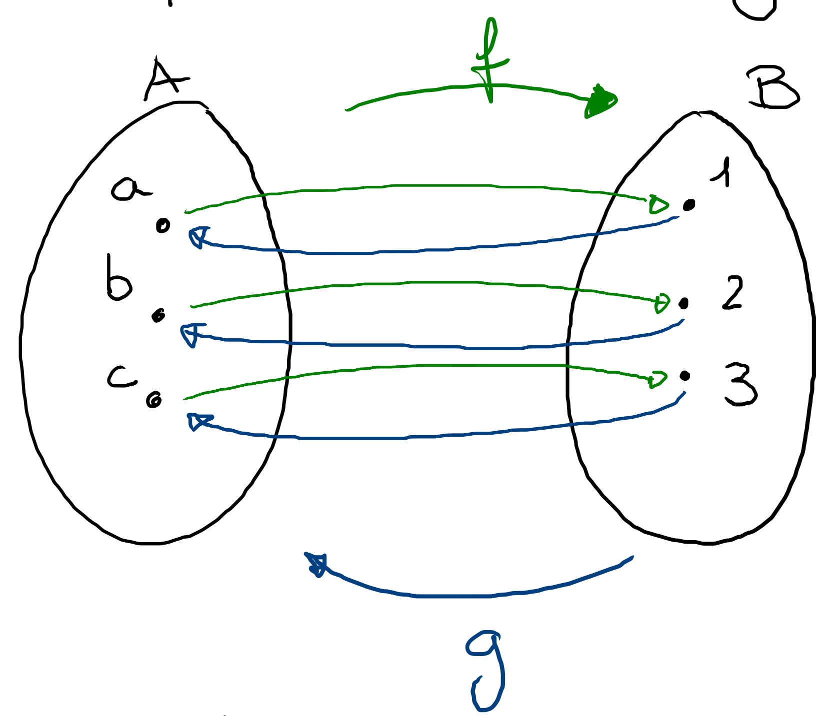
Fonctions bijectives et fonctions réciproques

But soit $f : A \to B$ une fonction, on aimerait définir une fonction $g : B \to A$ tel que $\forall x \in A$ $(g \circ f)(x) = x$



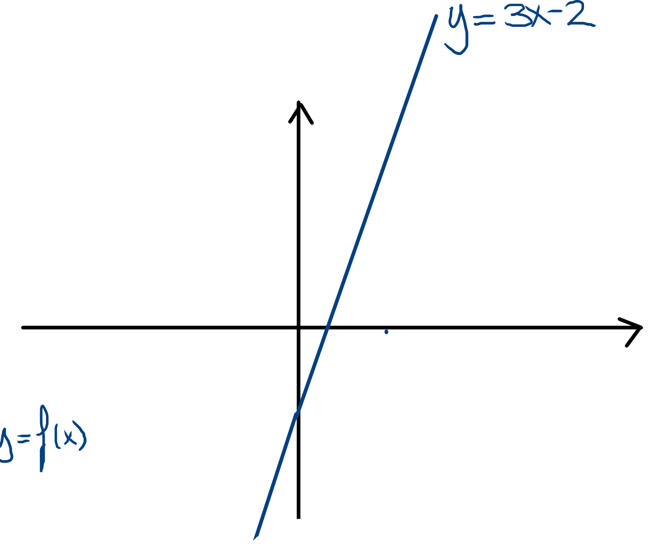
Définition Une fonction $f : A \to B$ est dite bijective si chaque élt de B est l'image d'exactement un élt de A

Rem : Si une fonction n'est pas bijective, on peut la rendre bijective en restreignant son ensemble de départ et d'arrivée

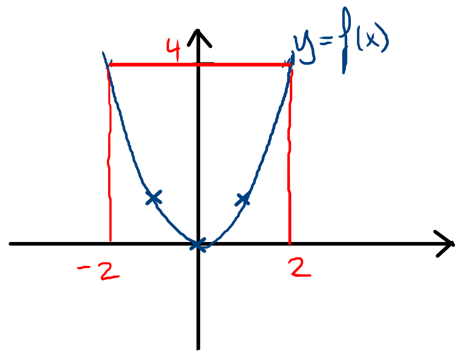
Exples

1) $$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x-2 \end{array}$$

est bijective



2) $$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$

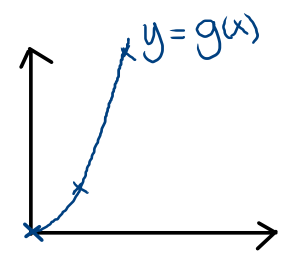


n'est pas bijective

car 4 est l'image de -2 et de 2

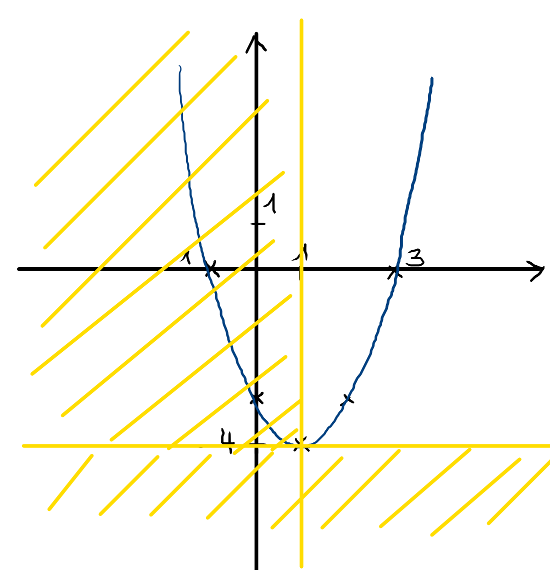
car -1 n'a pas de préimage.

mais $$g : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$ est bijective



3) $$f : \begin{array}{l} [1;+\infty[\longrightarrow [-4;+\infty[\\ x \longmapsto x^2-2x-3 = (x-3)(x+1) \end{array}$$

est bijective

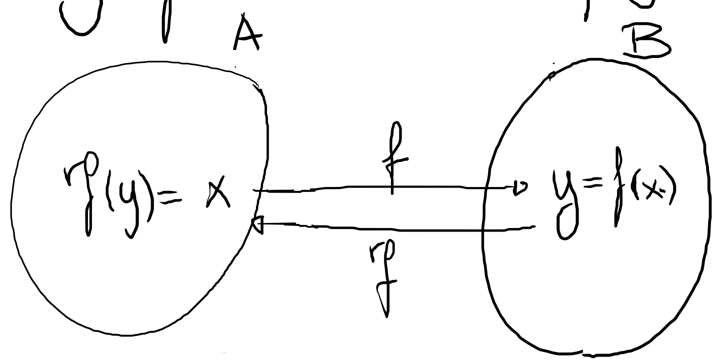


ou $f :]-\infty;1[\to [-4;+\infty[$

Définition Soit $f : A \to B$ une fonction bijective.

La fonction réciproque de f, notée ${}^{r}f$ ou f^{-1}, est la fonction ${}^{r}f : B \to A$ telle que

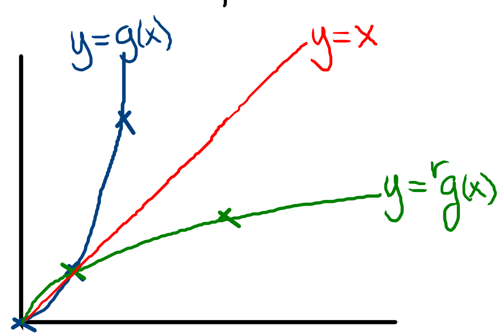
$$y = f(x) \iff x = {}^{r}f(y)$$



Propriétés 1) $(f \circ {}^{r}f)(y) = y \quad \forall y \in B$ et $({}^{r}f \circ f)(x) = x \quad \forall x \in A$

2) les graphes des fonctions f et ${}^{r}f$ sont symétriques par rapport à la diagonale du 1e quadrant (droite d'équation $y = x$)

Exple 2)



$$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto x^2$$

$${}^{r}g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

Exemples

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto 3x-2$ bijective

$y = 3x-2$

$3x = y+2$

$x = \dfrac{y+2}{3}$

$r_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\quad y \mapsto \dfrac{y+2}{3}$

$\quad x \mapsto \dfrac{x+2}{3}$

2) $g : \mathbb{R}-\{-5\} \to \mathbb{R}-\{2\}$
$\quad x \mapsto \dfrac{2x+3}{x+5}$

on rend ainsi g bijective
(car 2 n'a pas de préimage)

$y = \dfrac{2x+3}{x+5} \iff y(x+5) = 2x+3$

$\iff xy + 5y = 2x+3$

$\iff xy - 2x = 3-5y$

$\iff x(y-2) = 3-5y$

$\iff x = \dfrac{3-5y}{y-2}$ avec $y \neq 2$

$r_g : \mathbb{R}-\{2\} \to \mathbb{R}-\{-5\}$
$\quad x \mapsto \dfrac{3-5x}{x-2}$

3) $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [3; +\infty[$

$x \longmapsto x^2+3$

pour ne pas avoir aucune préimage

$y = x^2+3 \iff x^2 = y-3$

$\iff x = (\pm)\sqrt{y-3}$

pour éviter d'avoir 2 préimages on choisit $x \geq 0$ (ou $x \leq 0$)

h est bijective.

$^r h : [3; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$

$x \longmapsto \sqrt{x-3}$