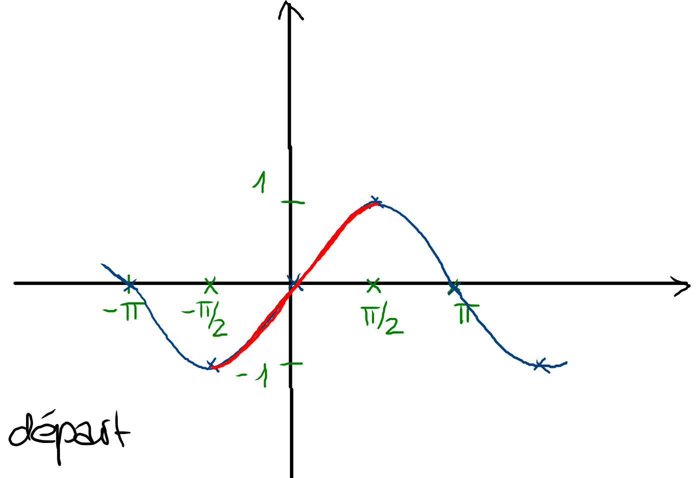
Fonctions trigonométriques réciproques



Arcsin

$\sin : \mathbb{R} \to [-1;1]$

n'est pas bijective

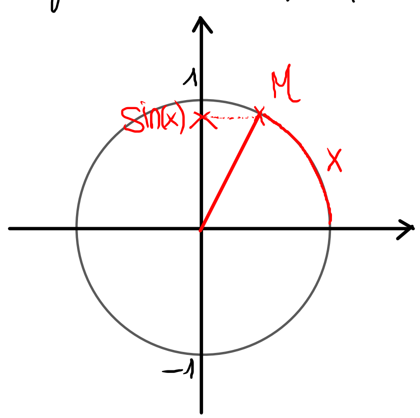
mais en restreignant l'ensemble de départ

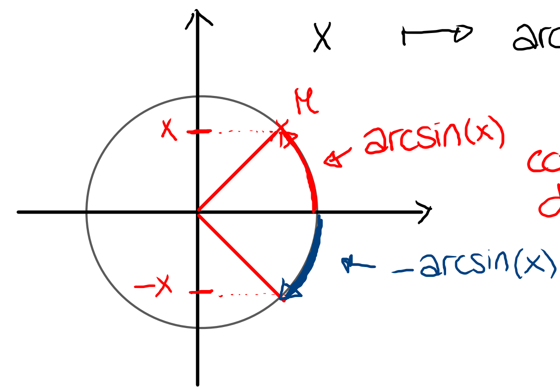
on a une bijection $\sin : [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \to [-1;1]$.

Donc on peut définir la fonction réciproque $\arcsin : [-1;1] \to [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$x \mapsto \arcsin(x)$

Avec le cercle trigo :

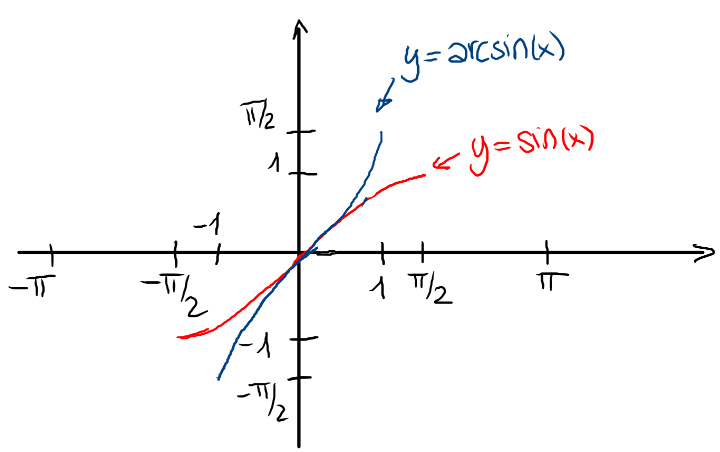


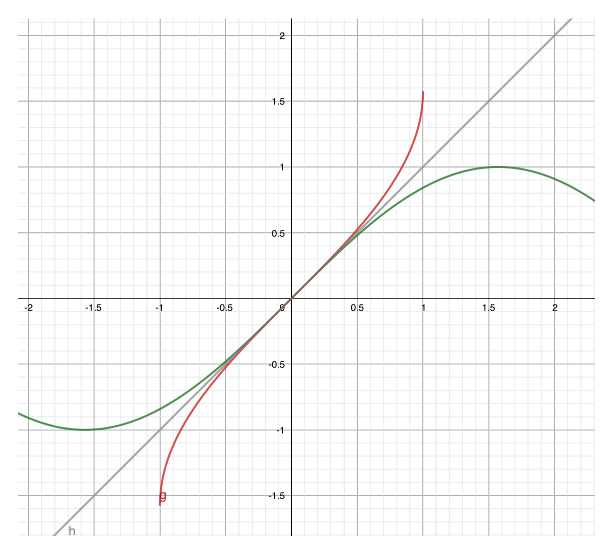


correspond à la longueur de l'arc

exple : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

propriété : $\arcsin(-x) = -\arcsin(x) \Rightarrow$ impaire (graphe sym. p.rapport à O)

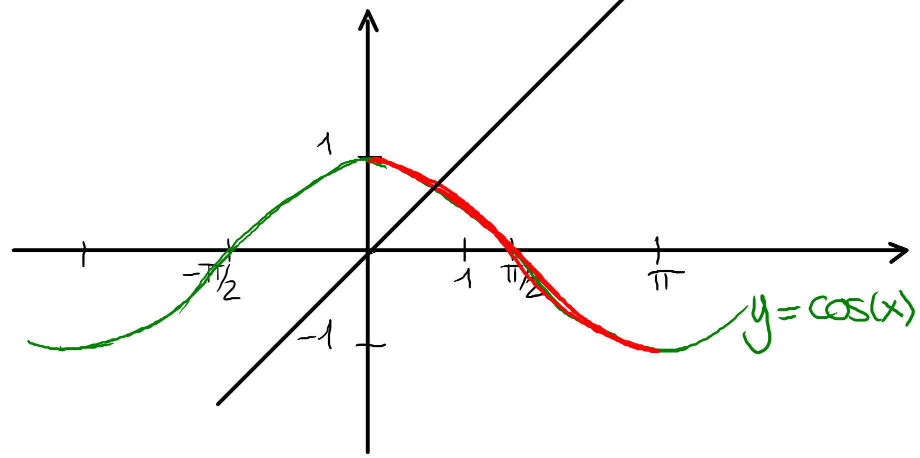




Arccos

$\cos : \mathbb{R} \to [-1;1]$

n'est pas bijective

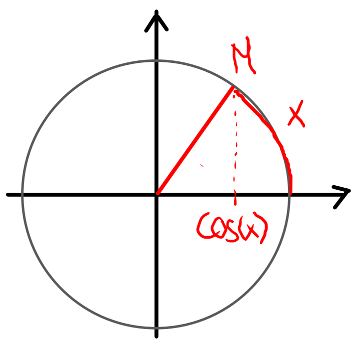


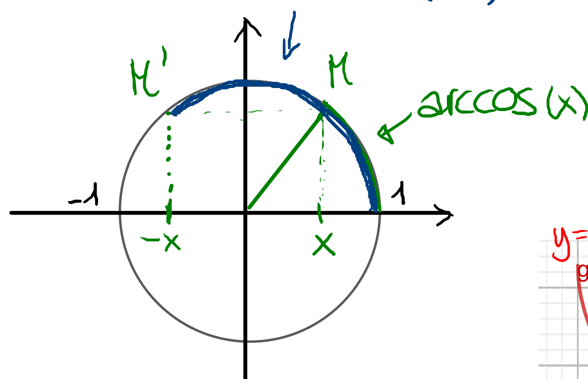
mais $\cos : [0;\pi] \to [-1;1]$

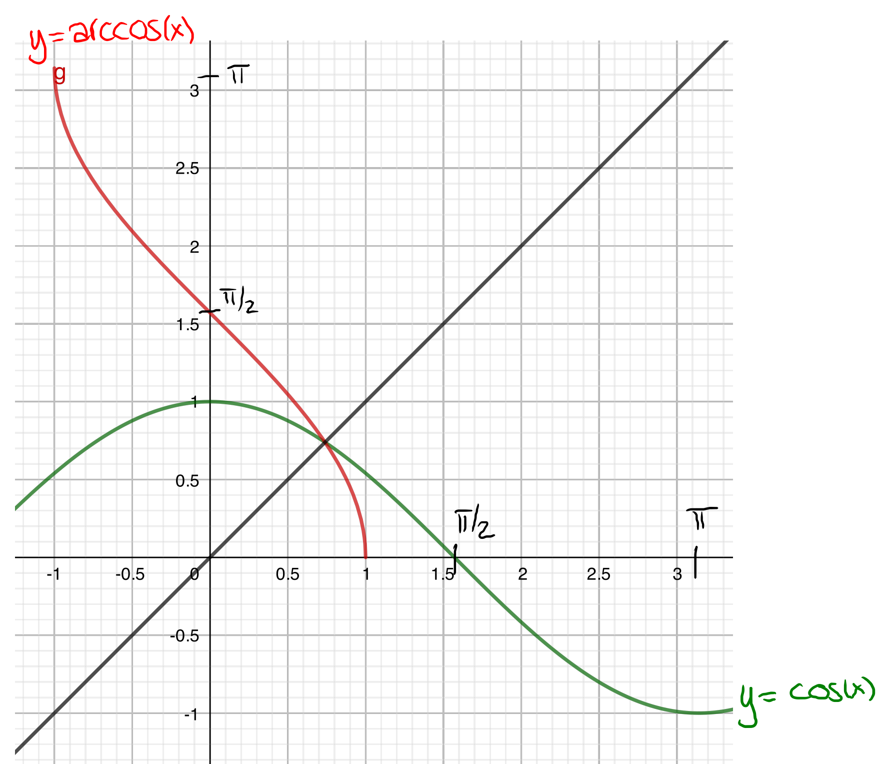
est bij.

$\Rightarrow$ on peut définir la réciproque $\arccos : [-1;1] \to [0;\pi]$

Propriété : $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$ $\Rightarrow$ ni paire ni impaire





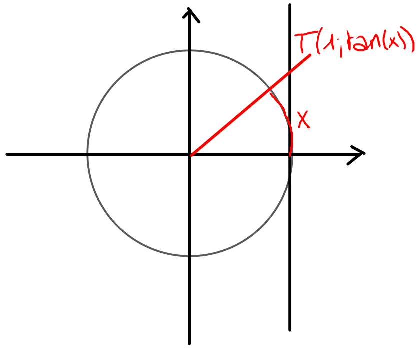


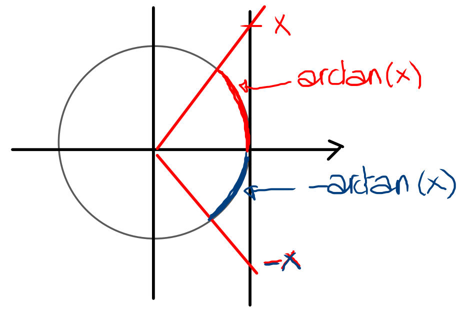
Arctan

$\tan : \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas bijective

mais $\tan : \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[\longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective

$\Rightarrow$ $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ est la fonction réciproque





Propriété : $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ $\Rightarrow$ impaire

Propriétés :

si $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right]$ alors $\arcsin(\sin(x)) = x$

si $x \in [0 ; \pi]$ alors $\arccos(\cos(x)) = x$

si $x \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ alors $\arctan(\tan(x)) = x$

Exemple

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$