2.8 Asymptotes

Intuitivement, une asymptote est une droite dont le graphe de f se rapproche "au voisinage" d'un point d'abscisse a ou "au voisinage" de $\pm\infty$.

AV : asymptote verticale.

La droite $x = a$ est une AV de la courbe $y = f(x)$

si $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} a} f(x) = \infty$ ou si $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} a} f(x) = \infty$

Par contre si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, b un nbre fini, on dit que $(a;b)$ est un "trou" de la courbe $y = f(x)$

Rem : a est une v.i de f.

AH : La droite $y = h$ est une asymptote horizontale de la courbe $y = f(x)$ si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = h$, $h \in \mathbb{R}$

En particulier si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = h_1$, $y = h_1$ est une AHD

à droite

si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = h_2$, $y = h_2$ est une AHG

à gauche

Exemples:

1) $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x^3-9x} = \dfrac{x^2+4x+3}{x(x+3)(x-3)}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R}^* - \{\pm 3\}$

$f(x) = \dfrac{(x+3)(x+1)}{x(x+3)(x-3)}$ ← (-3 et -1 zéro(s))

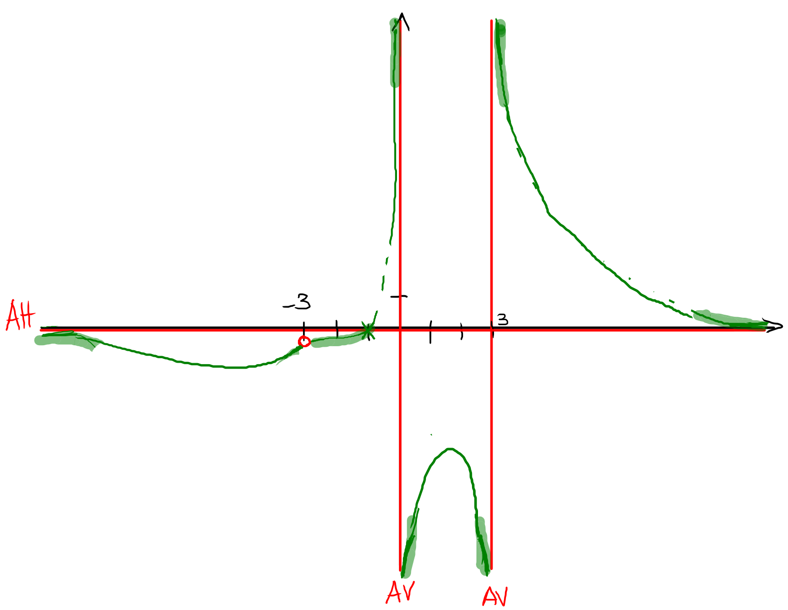
$0, -3, 3$ v.i.
(2)

AV $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \text{"}\dfrac{3}{0}\text{"} = \begin{cases} x \to 0_- : \dfrac{3}{(0_-)\cdot 3\cdot(-3)} = +\infty \\ x \to 0_+ : \dfrac{3}{(0_+)\cdot 3\cdot(-3)} = -\infty \end{cases}$ ⊛ $\Rightarrow$ $x = 0$ est une AV

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \text{"}\dfrac{24}{0}\text{"} = \begin{cases} x \to 3_- : \dfrac{24}{3\cdot 6\cdot 0_-} = -\infty \\ x \to 3_+ : \dfrac{24}{3\cdot 6\cdot 0_+} = +\infty \end{cases}$ ⊛ $\Rightarrow$ $x = 3$ est une AV

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ (f.i) $= \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\cancel{(x+3)}(x+1)}{x\cancel{(x+3)}(x-3)} = \dfrac{-2}{18} = -\dfrac{1}{9}$ $\Rightarrow$ $\left(-3; -\frac{1}{9}\right)$ "trou"

AH $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+4x+3}{x^3-9x} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}$ (f.i.) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x^2}}{x^{\cancel{3}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\infty} = 0$ $\Rightarrow$ $y = 0$ est une AH



Signe :

x		-3		-1		0		3	
sgn(f)	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$
		(2)				AV		AV	

$f(1000) : \dfrac{+}{+}$

Astuce : pour éviter les calculs à gauche et à droite des v.i ⊛
pour les fcts rationnelles on utilise le tableau de signe

2) $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2-2}{x^2-1} = \dfrac{(x+1)(x^2+2x-2)}{(x+1)(x-1)}$ $\qquad ED(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

<u>AV/trou</u>

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) \underset{\text{f.i.}}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x-2}{x-1} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \left(-1 ; \dfrac{3}{2}\right)$ "trou"

$\lim\limits_{x \to +1} f(x) = \text{"}\dfrac{2}{0}\text{"} = \infty \Rightarrow$ AV en $x = 1$

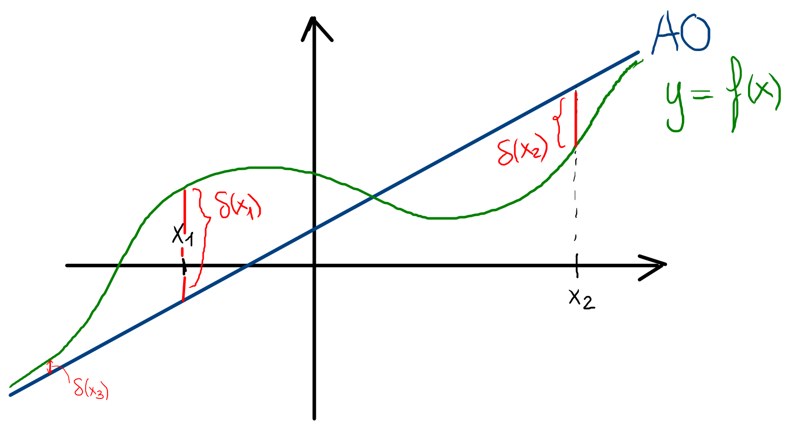
<u>AH</u>

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \underset{\text{f.i.}}{=} \text{"}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty \Rightarrow$ pas d'AH

<u>AO</u> : La droite d'équation $y = mx + h$ est une asymptote oblique de la courbe $y = f(x)$ si la différence entre les deux courbes tend vers 0 quand x tend vers l'∞

càd : $\boxed{\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (mx+h) \right] = 0}$

De même que pour les AH on distingue les AOG quand $x \to -\infty$ et les AOD quand $x \to +\infty$



Autrement dit $y = f(x)$ se comporte à l'infini comme une droite et s'écrit $f(x) = mx + h + \delta(x)$ avec $\lim_{x \to \infty} \delta(x) = 0$

<u>Rem</u> : 1) le signe de $\delta(x)$ permet de connaître la position relative des deux courbes.

2) Une AH est une AO de pente $m = 0$.

Dans cas $f(x) = h + \delta(x) \Rightarrow \delta(x) = f(x) - h$

avec $h = \lim_{x \to \infty} f(x)$

Cas particulier : les fonctions rationnelles : $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$

Si $\deg(N(x)) = \deg(D(x)) + 1$ alors f possède une AO

On obtient son équation en divisant $N(x)$ par $D(x)$

$$\begin{array}{c|l} N(x) & D(x) \\ \cline{2-2} \vdots & Q(x) \\ \cline{1-1} R(x) & \end{array}$$

de degré 1

⊛ $\deg(R(x)) < \deg(D(x))$

Par l'égalité fondamentale de la division on a

$$N(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Donc $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)} = \underbrace{Q(x)}_{mx+h} + \underbrace{\dfrac{R(x)}{D(x)}}_{\xrightarrow[x \to \infty]{} 0 \text{ car ⊛}}$

Reprenons l'exple 2) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 - 1}$

AO car $\deg(N(x)) = \deg(D(x)) + 1$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 2 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -x^3 \qquad\quad +x & x+3 \\ \cline{1-1} 3x^2 + x - 2 & \\ -3x^2 \qquad +3 & \\ \cline{1-1} x + 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = x + 3 + \dfrac{x+1}{\underbrace{x^2 - 1}_{\delta(x)}}$ (-1) ; 1 et -1 (2)

$\Rightarrow$ AO : $y = x + 3$

signe de $\delta(x)$:

x		-1		1	
sgn(δ)	$-$	‖ (2)	$-$	‖	$+$
pos.	f est dessous l'AO	‖	dessous	‖	dessus

$\delta(1000)$: $\frac{+}{+}$

Cas général

AO : $y = mx + h$

$$\boxed{m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad h = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right)} \quad \text{AOD}$$

de même avec $x \to -\infty$ pour AOG

preuve : supposons que $y = mx + h$ est une AOD

$$\Rightarrow f(x) = mx + h + \delta(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to \infty} \delta(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \Big(\frac{mx}{x} + \underbrace{\frac{h}{x}}_{\downarrow \, 0} + \underbrace{\frac{\delta(x)}{x}}_{\downarrow \, 0} \Big) = \lim_{x \to +\infty} \frac{m\cancel{x}}{\cancel{x}} = m$$

$$\text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(mx + h + \delta(x) - mx \right) = \lim_{x \to +\infty} \Big(h + \underbrace{\delta(x)}_{\downarrow \, 0} \Big) = \lim_{x \to +\infty} h = h$$

de même en $-\infty$

#

Exple $f(x) = 3x+1+\sqrt{9x^2-12x}$

⚠ $y=3x+1$ n'est pas l'AO car $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{9x^2-12x} \neq 0$

$ED(f) =]-\infty;0[\ \cup\ ]\frac{4}{3};+\infty[$

Cas $x \to +\infty$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \Big(\underbrace{3}_{\to 3} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\sqrt{9x^2-12x}}{x}}_{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{" f.i.}}\Big)$$

$$= 3 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{|x|}^{+x}\sqrt{9-\frac{12}{x}}}{x} = 3+\sqrt{9-0} = 3+3 = 6 = m$$

$$h = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x)-6x\big) = \lim_{x\to+\infty} \left(-3x+1+\sqrt{9x^2-12x}\right)$$

$$= 1 + \lim_{x\to+\infty} \left(-3x+\sqrt{9x^2-12x}\right) \overset{\text{"}-\infty+\infty\text{"}}{\underset{\text{f.i. conjugué}}{=}} 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{(9x^2-12x)-(3x)^2}^{-12x}}{\sqrt{9x^2-12x}+3x}$$

$$\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{\text{f.i.}}{=}} 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{-12x}{\underbrace{|3x|}_{+3x}\sqrt{1-\frac{4}{3x}}+3x} = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{3x}}+1} = 1+\frac{-4}{\sqrt{1}+1}$$

$$= 1-2 = -1 = h$$

$\Rightarrow$ AOD d'équation $y = 6x-1$

Cas $x \to -\infty$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(3 + \frac{1}{x} + \frac{\overbrace{|x|}^{\cancel{-x}} \sqrt{9 - 12/x}}{\cancel{x}} \right) = 3 + 0 - \sqrt{9-0} = 0$$

$$\Rightarrow \text{AHG}$$

$$h = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(3x + 1 + \sqrt{9x^2 - 12x} \right) \underset{\text{f.i.}}{\overset{\text{“}-\infty+\infty\text{”}}{=}}$$

conjugué

$$= 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{9x^2 - (9x^2 - 12x)}{3x - \sqrt{9x^2 - 12x}} = 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{12x}{3x - \underbrace{|3x|}_{-(-3x)} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{3x}}}$$

$$= 1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{1 + \sqrt{1 - 4/3x}} = 1 + \frac{4}{1+1} = 3$$

$$\Rightarrow \text{AHG} : y = 3$$