3. $\lim\limits_{x\to 0_+} x^3 \ln(x) =$ "$0\cdot(-\infty)$" (f.i.) $= \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\ln(x)}{x^{-3}} = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^3}}$ "$\frac{-\infty}{\infty}$" $\overset{B.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3x^2}{x^6}}$ (x^4)

$x \underset{>}{\to} 0$

$= \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{1}{x} \div \left(-\frac{3}{x^4}\right) = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{x^4}{3}\right) = \lim\limits_{x\to 0_+} -\frac{x^3}{3} = 0$

Cas "$0\cdot\infty$" : on essaye de se ramener au cas "$\frac{0}{0}$" ou "$\frac{\infty}{\infty}$" pour utiliser B.H.

Exple suppl. : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^x =$ "$-\infty\cdot 0$" $= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{e^{+\infty}} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{B.H.}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}\cdot(-1)}$

$= \frac{1}{-e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$

ex 1.1.5 g) d)

Étude de fonction

L'étude des fonctions exponentielles et logarithmes admet la même marche à suivre que celle des fonctions polynomiales ou rationnelles.
Cependant :

1. Pour la recherche d'AV, il faut calculer la limite lorsque $x \to a$ où a est un pôle (valeur interdite se trouvant "dans" ou "au bord" de l'ensemble de définition).
2. La recherche d'AH doit être effectuée en deux étapes :
   — l'éventuelle AHG à l'aide de la $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
   — l'éventuelle AHD à l'aide de la $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. Il n'y aura **pas d'AO** à déterminer car la division polynomiale ne peut s'appliquer ici.

Exemples :

1. Déterminer les éventuelles asymptotes de la fonction $f(x) = xe^{x-2}$
2. Déterminer les éventuelles asymptotes de la fonction $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$
3. Étudier la fonction $f(x) = (x-1)e^{2x}$
4. Étudier la fonction $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$

+ 1.1.13 b) et 1.1.14 a) en exple pour étude complète.

1) $f(x) = xe^{x-2}$ $\quad ED(f) = \mathbb{R}$

AV/hou : — vu l'ED(f)

AH : à gauche : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\cdot e^{-\infty} =$ "$-\infty\cdot 0$" $\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x+2}} = \frac{-\infty}{\infty}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x+2}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow$ AHG : $y = 0$

à drte : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\cdot+\infty = +\infty$ pas d'AHD

2) $f(x) = \ln(x^2+2x)$

cond : $x^2+2x > 0 \iff \underset{\downarrow\ 0}{x}\,\underset{\downarrow\ -2}{(x+2)} > 0$

x		-2		0	
x^2+2x	$+$	0	$-$	0	$+$

$ED(f) =]-\infty\,;-2[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$

AV/ hau

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \ln(x^2+2x) = \ln(0_+) = -\infty$ AV : $x=0$

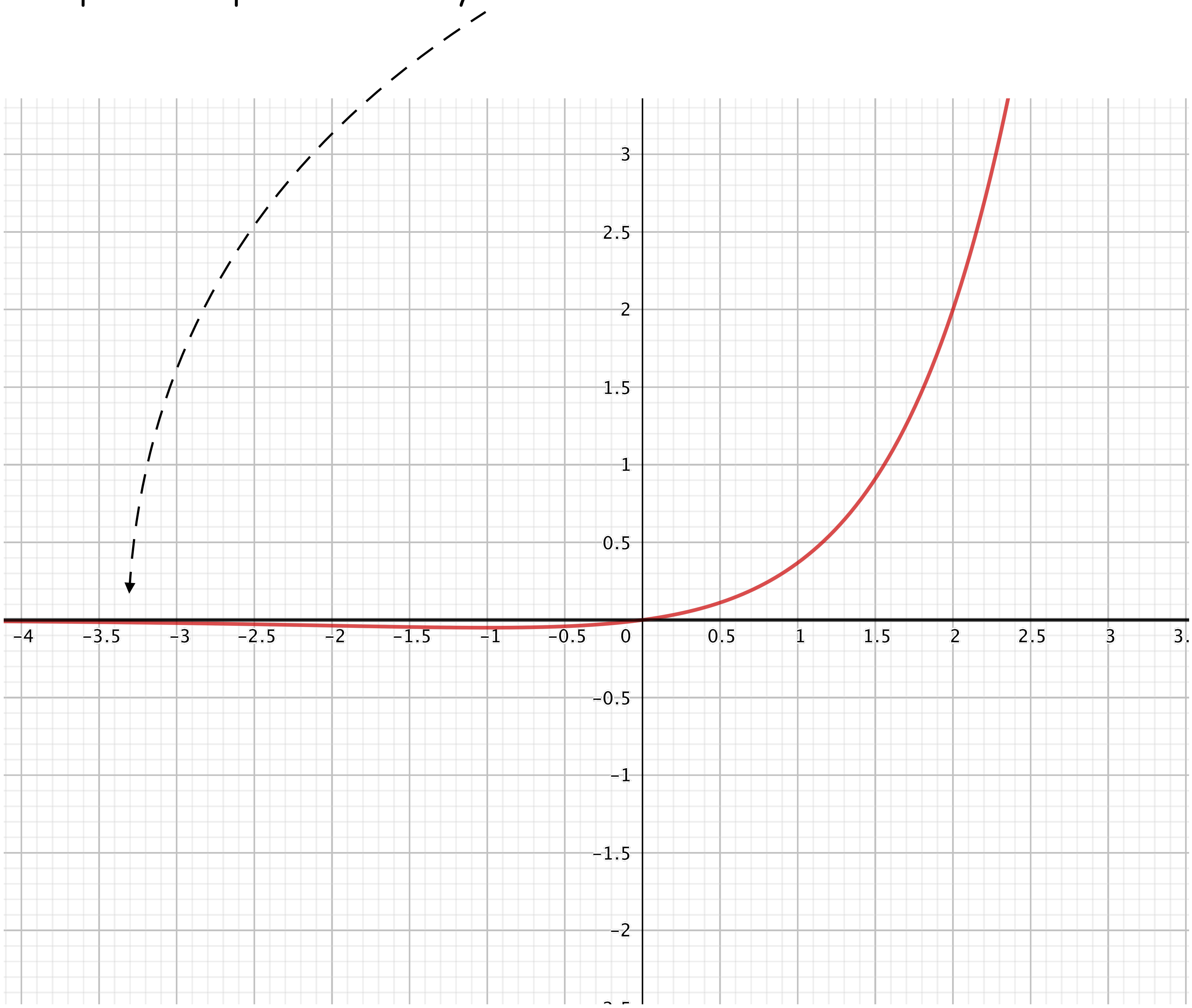
$\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ <}} \ln(\underbrace{x^2+2x}_{(-2)^2+2\cdot(-2)}) = \ln(0_+) = -\infty$ AV : $x=-2$

AH : G : $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln(x^2+2x) = \ln(+\infty) = +\infty$

D : $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x^2+2x) = \ln(+\infty) = +\infty$

$\Rightarrow$ pas d'AH

Graphe de l’exple 1 avec AHD y = 0



Graphe de l'exple 2 avec AV x = -2 et x = 0