<u>Colinéarité</u> : $\vec{a} \sim \vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ont la même direction (déf.)

$\Leftrightarrow$ un vecteur peut s'écrire comme un multiple de l'autre vecteur. (1e)

$\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ avec $k \in \mathbb{R}$

$\in$ signifie "appartient à"

$\Leftrightarrow$ $\det(\vec{a}\,;\vec{b}) = 0$ (2e)

$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

Exple $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ a-t-on $\vec{a} \sim \vec{b}$?

On cherche k tel que $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6k \\ 9k \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -6k = 4 & \Leftrightarrow \quad k = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3} \\ 9k = -6 & \Leftrightarrow \quad k = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3} \end{cases} \Big\} = \checkmark$$

$\Rightarrow$ $\vec{a} \sim \vec{b}$ car $\vec{a} = -\frac{2}{3} \vec{b}$

Rem : $\vec{b} = -\frac{3}{2} \vec{a}$

1.3.1 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on considère les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \vec{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Regrouper les vecteurs qui sont colinéaires.

$$\vec{a} \sim \vec{d} \sim \vec{e} = \vec{0} \sim \vec{h}$$

$$\vec{c} \sim \vec{g} \sim \vec{e} = \vec{0}$$

$$\vec{b} \sim \vec{i} \sim \vec{e} = \vec{0}$$

$$\vec{f} \sim \vec{e} = \vec{0}$$

2e Critère de colinéarité

Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ non nuls

$$\vec{a} \sim \vec{b} \iff \vec{a} = k \cdot \vec{b}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a_1 = k \cdot b_1 & \iff k = \dfrac{a_1}{b_1} \quad (b_1 \neq 0) \\ a_2 = k \cdot b_2 & \iff k = \dfrac{a_2}{b_2} \quad (b_2 \neq 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

$$\iff a_1 b_2 = a_2 b_1$$

$$\iff \underbrace{a_1 b_2 - a_2 b_1}_{} = 0$$

on appelle ce nombre le déterminant de $\vec{a}$ et $\vec{b}$

on note $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \det(\vec{a} ; \vec{b})$

Exemples :

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 21 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{a} \not\sim \vec{b}$ car $\vec{a} \neq k \cdot \vec{b}$

ou $\det(\vec{a} ; \vec{b}) = \begin{vmatrix} 21 & 14 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 21 \cdot 4 - (-8) \cdot 14$

$= 84 + 112 \neq 0$

2) $\vec{c} = \begin{pmatrix} m \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} m+1 \\ m+1 \end{pmatrix}$

Que vaut m pour $\vec{c} \sim \vec{d}$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 3 & m+1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow m \cdot (m+1) - 3(m+1) = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + m - 3m - 3 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (m-3)(m+1) = 0$

$\Leftrightarrow m = 3$ ou $m = -1$