Ex 1.1.13

a) $f(x) = e^{-x^2}$

1. $ED(f) = \mathbb{R}$

2. zéro : $\not\exists$ signe :

x	
$f(x)$	$+$

3. AV-trou : $\not\exists$

AH : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^{x^2}} = 0$

idem pour $x \to +\infty$ $\Rightarrow$ AH en $y = 0$

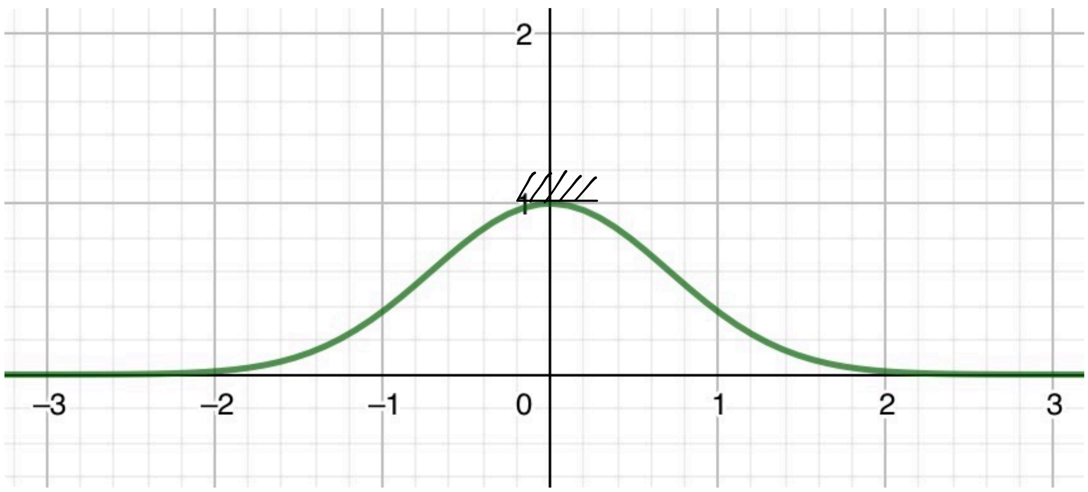
4. croissance : $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

zéro de f' : $-2x\underbrace{e^{-x^2}}_{>0} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x		0	
$\operatorname{sgn}(f')$	$+$	ϕ	$-$
croiss. f	$\nearrow$	Max	$\searrow$

Max $(0; f(0)) = (0; 1)$

5. graphe :



b) $f(x) = e^{1/x}$

1. $ED(f) = \mathbb{R}^*$

2. zéro et signe : $e^{1/x} > 0$

x		0	
$f(x)$	$+$	$\|$	$+$

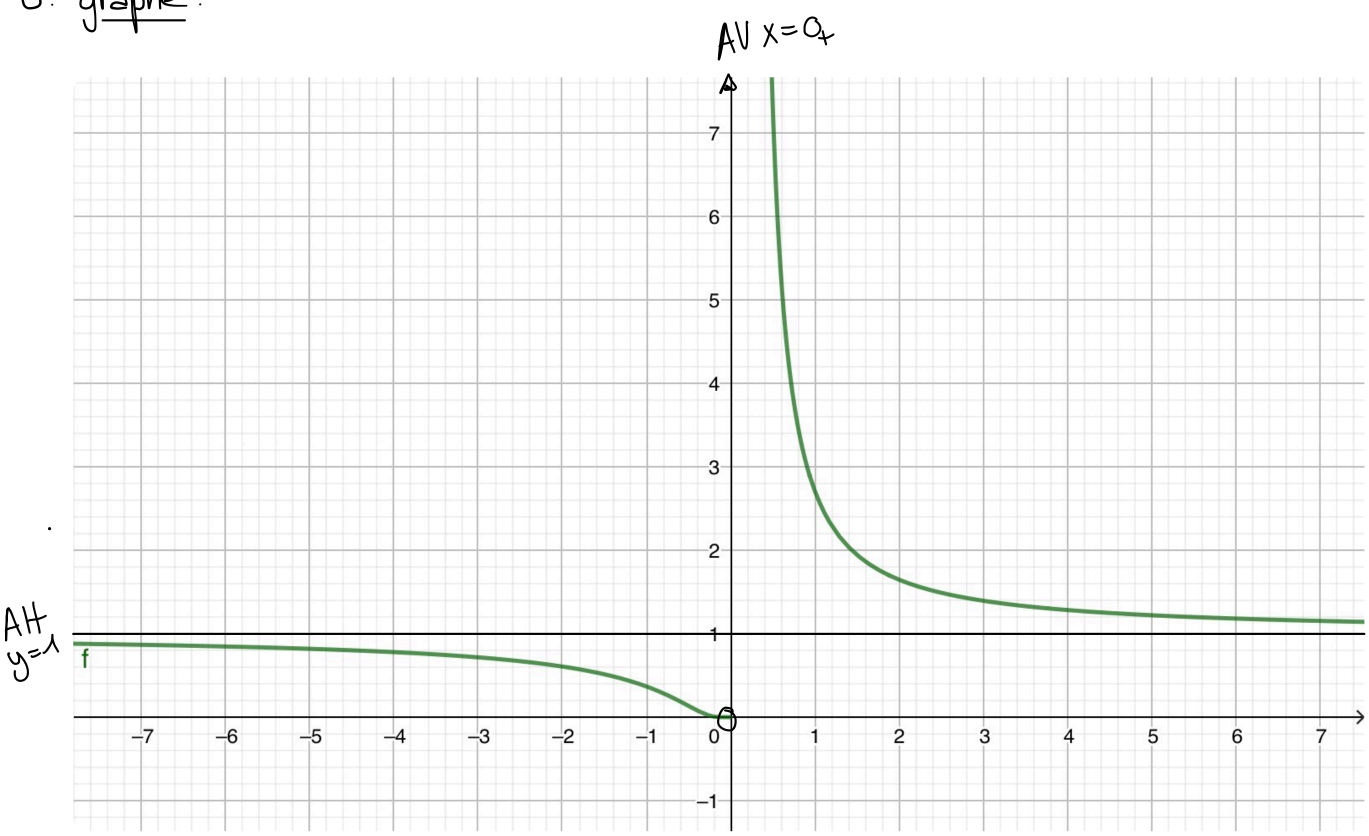
3. asymptotes : AV - trou : $\lim\limits_{x \to 0} e^{1/x} = \begin{cases} >0 & \text{"}e^{+\infty}\text{"} = +\infty \\ <0 & \text{"}e^{-\infty}\text{"} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ AV en $x = 0_+$ (à droite) ; $\Rightarrow$ trou en "(0;0) (à gauche)

AH : $\lim\limits_{x \to \mp\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$ $\Rightarrow$ AH en $y = 1$

4. croissance : $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1/x} = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$ pas de zéro, v.i : 0

x		0	
$\text{sgn}(f')$	$-$	$\|$	$-$
f	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

5. graphe :



c) $f(x) = (x^2-4x+4)e^x$

1. $ED(f) = \mathbb{R}$

2. zéro : $(x^2-4x+4)\underbrace{e^x}_{>0} = 0 \iff x^2-4x+4 = 0 \iff (x-2)^2 = 0 \iff x = 2$

signe :

x		2	
$sgn(f)$	$+$	0	$+$

3. AV : $\nexists$

AH : à gauche : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \overset{+\infty \cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-4x+4}{e^{-x}} \underset{B.H.}{\overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-4}{-e^{-x}} \underset{B.H.}{\overset{"\frac{-\infty}{-\infty}"}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{e^{-x}}$

$= \dfrac{2}{+\infty} = 0 \Rightarrow$ AHG en $y=0$

à droite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty \Rightarrow$ pas d'AHD

4. croissance : $f'(x) = (2x-4)e^x + (x^2-4x+4)e^x = e^x\left(2x-4+x^2-4x+4\right) = e^x(x^2-2x)$

$= \underset{0}{x}\,\underbrace{e^x}_{>0}\,\underset{2}{(x-2)}$

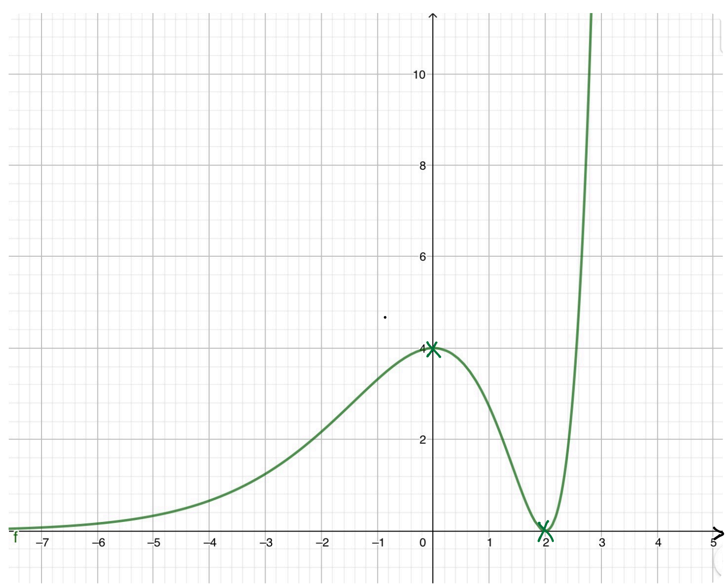
zéros de f' : 0 et 2

x		0		2	
$sgn(f')$	$+$	0	$-$	0	$+$
croiss. f	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Max $(0; f(0)) = (0;4)$

min $(2; f(2)) = (2;0)$

5 graphe



AHD
$y=0$

e) $f(x) = \dfrac{e^x+2}{1-3e^x}$

1. ED : cond : $1 \neq 3e^x \iff e^x \neq \frac{1}{3} \iff x \neq \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$ $(\cong -1,1)$

$ED(f) = \mathbb{R} - \left\{\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right\} = \mathbb{R} - \left\{-\ln(3)\right\}$

2. zéro : $\underbrace{e^x}_{>0} + 2 = 0$ pas de zéro

signe :

x		$-\ln(3)$	
$sgn(f)$	$+$	$\|$	$-$

$f(-2) \cong 3,6$ $\quad f(0) = -\frac{3}{2}$

3. AV-trou : $\lim\limits_{x\to -\ln(3)} f(x) = \dfrac{\frac{1}{3}+2}{0} = \infty \Rightarrow$ AV en $x = -\ln(3)$

AH : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+2}{1-3e^x} = \dfrac{2}{1} = 2 \Rightarrow$ AHG en $y = 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{\underset{BH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overset{1}{\cancel{e^x}}}{-3\cancel{e^x}} = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow$ AHD en $y = -\frac{1}{3}$

4. croissance : $f'(x) = \dfrac{e^x(1-3e^x) + 3e^x(e^x+2)}{(1-3e^x)^2} = \dfrac{e^x(1-3e^x+3e^x+6)}{(1-3e^x)^2} = \dfrac{7e^x}{(1-3e^x)^2}$

zéro de f' : aucun

v.i : $-\ln(3)$

x		$-\ln(3)$	
$sgn(f')$	$+$	$\|$	$+$
f	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

5. graphe :