Ex 1.1.14

a) $f(x) = x^2 \ln(x)$

1. $ED(f) = \mathbb{R}^*_+$

2. zéro et signe : $x^2 \cdot \ln(x) = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow 0 \notin ED(f)$; $\ln(x) = 0 \Rightarrow 1$ ✓

x	0		1	
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$

3. AV - trou : $\lim\limits_{x \to 0_+} x^2 \ln(x) \overset{0\cdot(-\infty)}{=}$ f.i. $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{B.H.}{=}} \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}}} = \lim\limits_{x\to 0_+} -\dfrac{1}{\cancel{x}} \cdot \dfrac{x^{\cancel{3}\,2}}{2} = 0$

$\Rightarrow$ trou en $(0;0)$

AH : à gauche : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ n'a pas de sens vu $ED(f)$

à droite : $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \cdot \ln(x) = +\infty \Rightarrow$ pas d'AH

4. croissance : $f'(x) = 2x\ln(x) + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2x\ln(x) + x = x(2\ln(x)+1)$

zéros de f' : ~~$x=0$~~ $\notin ED(f)$ ou $2\ln(x)+1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ✓ $\sim 0{,}6$

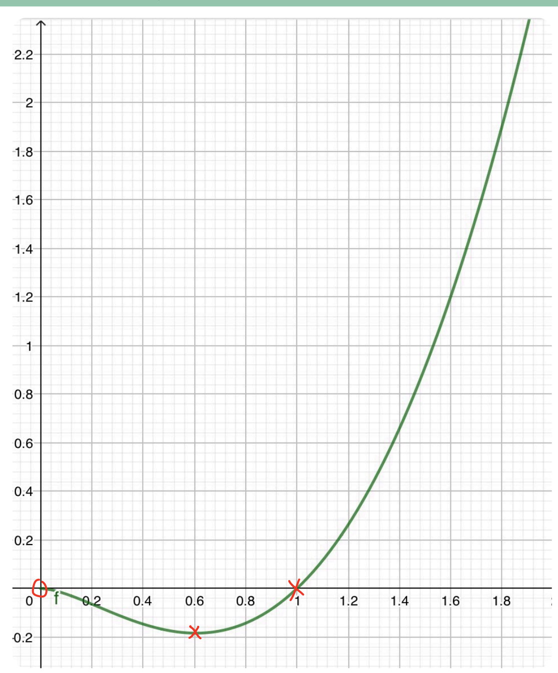
x	0		$1/\sqrt{e}$	
sgn(f')	‖	$-$	0	$+$
croiss. de f	‖	↘	min	↗

$f'(0{,}5) \cong -0{,}4$

$f'(1) = 1$

$\min\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}} ; f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{e}} ; -\dfrac{1}{2e}\right) \cong (0{,}6 ; -0{,}2)$

5. graphe :



c) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

1. $ED(f) = \mathbb{R}_+^*$

2. zeros et signe : zéro : $x = 1$

x	0		1	
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$

3. asymptotes : AV-trou : $\lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{-\infty}{0_+} = -\infty \Rightarrow x = 0_+$ est une AV

AH : à droite (pas de sens à gauche) : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} \underset{B.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \dfrac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow$ AHG en $y = 0$

4. croissance : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x)}{x^2} = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$ zéro : $1 = \ln(x) \Leftrightarrow x = e$

x	0		e	
sgn (f')	‖	$+$	0	$-$
croiss. de f	‖	$\nearrow$	Max	$\searrow$

$\text{Max}(e ; f(e)) = (e ; \frac{1}{e}) \approx (2{,}7 ; 0{,}4)$

5. graphe :