Ex suppl. combinaisons linéaires et bases

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$

dans une base $B = (\vec{e_1} ; \vec{e_2})$

a) Donner les composantes de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans B

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ car $\vec{e_1} = 1 \cdot \vec{e_1} + 0 \cdot \vec{e_2}$

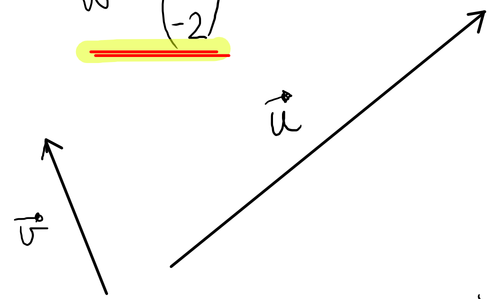
$\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ car $\vec{e_2} = 0 \cdot \vec{e_1} + 1 \cdot \vec{e_2}$

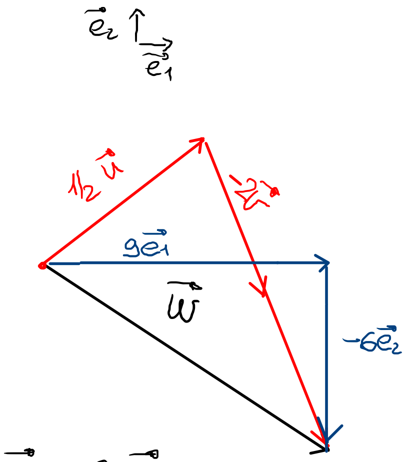
Rem: les vecteurs qui forment la base ont tjrs ces cpstes dans leur base.

b) Déterminer les composantes de $\vec{w}$ dans $B' = (\vec{u}, \vec{v})$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\vec{w} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}}$ dans $\underline{B = (\vec{e}_1 ; \vec{e}_2)}$

Dans $\underline{B' = (\vec{u} ; \vec{v})}$, $\quad \underline{\vec{w} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2 \end{pmatrix}}$





$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}_B = 9\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2$$

$$=$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2 \end{pmatrix}_{B'} = \frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$$

Pour déterminer algébriquement les cpstes de $\vec{w}$ dans $B' = (\vec{u} ; \vec{v})$ on résout l'équation $\vec{w} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$ où x et y sont les inconnues et sont les cpstes.

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x - 2y \\ 8x + 5y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 10x - 2y = 9 & \vert\ 5 \\ 8x + 5y = -6 & \vert\ 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 50x - 10y &= 45 \\ 16x + 10y &= -12 \\ \hline 66x &= 33 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\xRightarrow[\text{1}^{\text{e}}\text{équa.}]{\text{dans}}$

$$\begin{aligned} 10 \cdot \frac{1}{2} - 2y &= 9 \\ 5 - 2y &= 9 \\ -2y &= 4 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2 \end{pmatrix}_{B'}$$