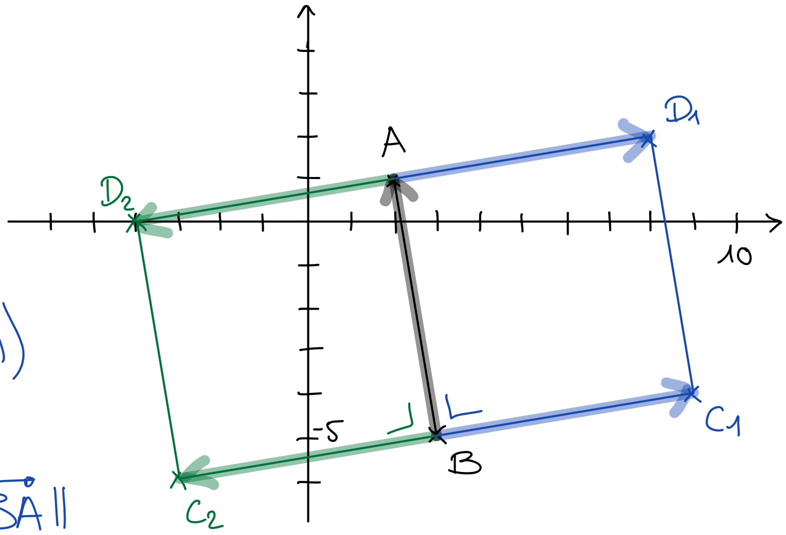
Ex 1

$A(2;1)$ $B(3;-5)$

ABCD est un carré



Avec A et B on peut calculer

$\vec{BA} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ (ou $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$)

ABCD est un carré

$\Rightarrow$ $\vec{BC} \perp \vec{BA}$ et $\|\vec{BC}\| = \|\vec{BA}\|$

$\Rightarrow$ $\vec{BC_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ car $\vec{BC_1} \cdot \vec{BA} = 6\cdot(-1) + 1\cdot 6 = 0$

et $\|\vec{BC_1}\| = \sqrt{36+1} = \|\vec{BA}\| = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$

ou $\vec{BC_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$ car ... (idem)

$\Rightarrow$ En posant $C_1(x;y)$ on a

$\vec{BC_1} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 6 \\ y+5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow$ $\underline{C_1(9;-4)}$

ou en posant $C_2(s;t)$ on a

$\vec{BC_2} = \begin{pmatrix} s-3 \\ t+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} s-3 = -6 \\ t+5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -3 \\ t = -6 \end{cases} \Rightarrow$ $\underline{C_2(-3;-6)}$

ABCD est un carré, donc un parallélogramme

$\Rightarrow$ $\vec{AD_1} = \vec{BC_1}$ ou $\vec{AD_2} = \vec{BC_2}$

$\Rightarrow$ En posant $D_1(a;b)$ on a

$\vec{AD_1} = \begin{pmatrix} a-2 \\ b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2 = 6 \\ b-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow$ $\underline{D_1(8;2)}$

ou en posant $D_2(c;d)$

$\vec{AD_2} = \begin{pmatrix} a-2 \\ b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2 = -6 \\ b-1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\underline{D_2(-4;0)}$

<u>Variante</u> pour trouver C_1 et D_1

on a $\vec{BC_1} = \vec{AD_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \vec{OC_1} = \vec{OB} + \vec{BC_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad C_1(9;-4)$

et $\quad \vec{OD_1} = \vec{OA} + \vec{AD_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad D_1(8;2)$

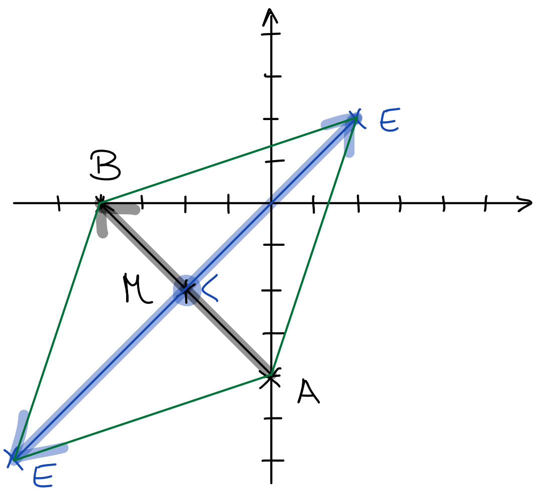
de même pour C_2 et D_2 avec $\vec{BC_2} = \vec{AD_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$ ...

<u>Ex 2</u>

$A(0;-4)$ et $B(-4;0)$

AEBF est un losange

et $\|\vec{EF}\| = 2 \cdot \|\vec{AB}\|$



$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4-0 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

les diagonales d'un losange se coupent à angle droit et en leur milieu M.

$\Rightarrow \quad \vec{MF} \perp \vec{AB}$ et $\|\vec{MF}\| = \|\vec{AB}\|$ (car diag. EF deux fois plus longue que diag. AB (donnée))

$\Rightarrow \quad \vec{MF} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ car $\vec{MF} \cdot \vec{AB} = -4 \cdot (-4) + (-4) \cdot 4 = 16 - 16 = 0$ et

$\|\vec{MF}\| = \sqrt{16+16} = \|\vec{AB}\| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

On calcule encore M milieu de AB : $M\left(\frac{0-4}{2}; \frac{-4+0}{2}\right) = M(-2;-2)$

$\Rightarrow$ En posant $F(x;y) \Rightarrow \vec{MF} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -6 \end{cases} \Rightarrow \underline{F(-6;-6)}$

Variante : $\vec{OF} = \vec{OM} + \vec{MF} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow F(-6;-6)$

Et de même pour $E(s;t)$: $\vec{ME} = \begin{pmatrix} s+2 \\ t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{E(2;2)}$

Variante : $\vec{OE} = \vec{OM} + \vec{ME} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow E(2;2)$

Aire du losange : $\dfrac{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{EF}\|}{2} = \|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{ME}\| = \sqrt{16+16}\sqrt{16+16} = 32\,u^2$

Longueur d'un côté : $\|\vec{AE}\| = \left\|\begin{pmatrix}2-0\\2+4\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\ u$

Ex 3

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix}-6\\-9\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ distance : $\|\vec{AB}\| = \sqrt{36+81} \cong 10{,}8167\ u$

$\Rightarrow$ en réalité : $\sim 10{,}8167\cdot 100 = 1081{,}67\ m$

b) $\ell = \sqrt{100^2+100^2} \cong 141{,}42\ m$

c) S : 11 rue Sémard , R : place Robert Sch. G : place de la Gare

$\vec{SR} = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{SG} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$\|\vec{SR}\| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

$\|\vec{SG}\| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$\vec{SR}\cdot\vec{SG} = -2\cdot 2 + 4\cdot 2 = -4+8 = 4$

$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{\sqrt{20}\sqrt{8}}\right) \cong \cos^{-1}(0{,}316) \cong 71{,}57°$

d) Il faut voir si $\vec{PC} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix}-11\\-16\end{pmatrix}$ sont colinéaires :

$\det(\vec{PC}\,;\vec{d}) = \begin{vmatrix}2 & -11\\3 & -16\end{vmatrix} = 2\cdot(-16) - 3\cdot(-11) = -32+33 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ $\vec{PC}$ et $\vec{d}$ non colinéaires

Donc ce n'est pas possible