Révision - Limites et asymptotes - Corrigé

Exercice 1

D'une fonction rationnelle f, on donne son étude de signe (ci-dessous) et l'équation de ses asymptotes : $x = 1$ et $y = 2$

x		-1		1		4	
$f(x)$	$+$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

a) Vrai ou Faux ?

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{4\}$ Faux 4 est un zéro pas un pôle $(ED(f) = \mathbb{R} - \{1\})$

2) Il y a un zéro de multiplicité paire. Vrai en $x = -1$ car le signe de f est le même avant et après -1

3) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ Faux sinon il y aurait une AH d'équation $y = 1$

4) Le degré du numérateur et celui du dénominateur sont égaux. Vrai car il y a une AH d'équation $y = 2$ $\left(\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2 \cdot x^n}{x^n} = 2\right)$

5) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ Vrai car il y a une AV d'équation $x = 1$

b) D'après l'étude de signe et les équations des asymptotes, déterminer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$

car AV $x = 1$

3) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 0$ $(= f(4))$

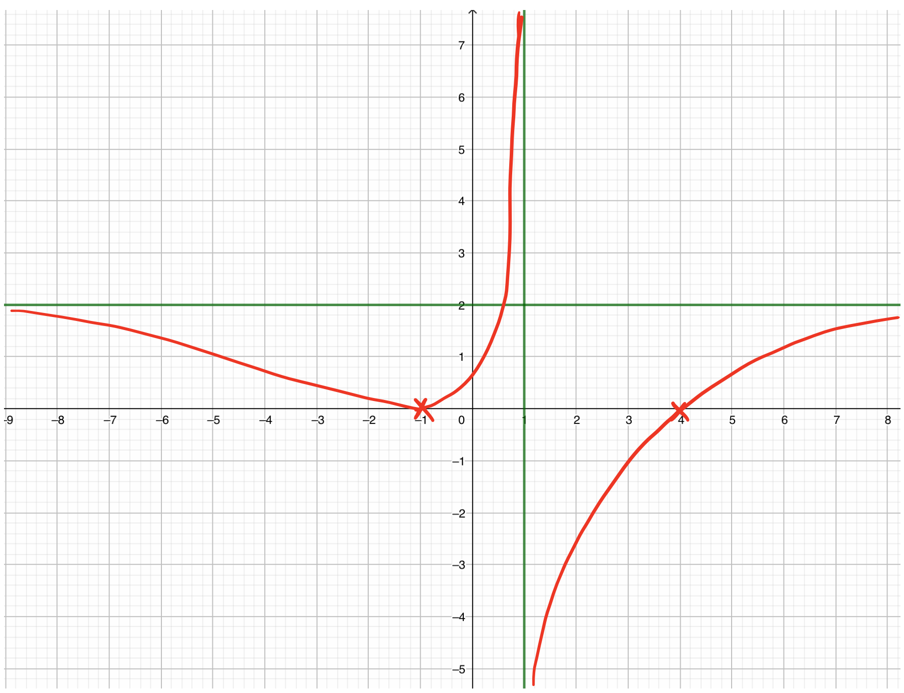
4) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ (car AH)

c) Esquisser un graphique pour cette fonction f.

d) Donner une fonction f qui pourrait admettre cette étude de signe et ces asymptotes.

par exemple : $f(x) = \dfrac{2(x+1)^2(x-4)}{(x-1)^3}$ ou $\dfrac{4(x+1)^2(x-4)^3}{2(x-1)^5}$

c) par exemple :



Ex 2

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+x^3+3x^2}{x^2} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(x^2+x+3)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} (x^2+x+3) = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 2^{>}} \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-5x+6} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 2^{>}} \dfrac{\sqrt{x-2}}{(x-2)(x-3)} \cdot \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2^{>}} \dfrac{x-2}{(x-2)(x-3)\sqrt{x-2}}$

$= \lim\limits_{x\to 2^{>}} \dfrac{1}{(x-3)\sqrt{x-2}} = \dfrac{1}{-1\cdot 0_+} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+|x|}{x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}$

$<$: $\lim\limits_{x\to 0^{<}} \dfrac{2x-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^{<}} \dfrac{x}{x} = 1$

$>$: $\lim\limits_{x\to 0^{>}} \dfrac{2x+x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^{>}} \dfrac{3x}{x} = 3$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^5-2x^3+x}{(x+3)^4} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^5}{x^4} = \lim\limits_{x\to -\infty} 3x = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^3-3x-\dfrac{x^2+1}{x}\right) \overset{\text{"}+\infty-\infty\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4-3x^2-x^2-1}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4}{x}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x-\sqrt{x^2+2x+7}) = -\infty-(+\infty) = -\infty-\infty = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-\sqrt{x^2+2x+7}) \overset{\text{"}+\infty-\infty\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} (x-\sqrt{x^2+2x+7}) \cdot \dfrac{x+\sqrt{x^2+2x+7}}{x+\sqrt{x^2+2x+7}}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-(x^2+2x+7)}{x+\sqrt{x^2+2x+7}}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-2x-7}{x+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-2x-7}{x+x\cdot\sqrt{1+\dots}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-2x}{x(1+\sqrt{1+\dots})}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-2x}{2x} = -1$

Ex 3

a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \dfrac{\overset{-2}{(x+2)}\overset{2}{(x-2)}}{\underset{3}{(x-3)}\underset{2}{(x-2)}}$

zéros : -2 (et 2)

pôles : 2 et 3 — multiplicité 2

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{2;3\}$

2) signe :

x		-2		2		3	
sgn(f)	$+$	0	$-$	$\|\|$ (2)	$-$	$\|\|$	$+$

$f(1000) : \dfrac{+}{+}$

3) asymptotes :

AV/trou : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x-3} = \dfrac{4}{-1} = -4 \Rightarrow (2;-4)$ trou

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \text{"}\dfrac{5}{0}\text{"} = \infty \Rightarrow x=3$ est une AV

AH/AO : $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y=1$ est une AH

(à gauche et à droite pour fcts rationnelles)

étude de position : comme $f(x) = 1 + \delta(x)$

alors $\delta(x) = f(x) - 1$

$= \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} - \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-5x+6} = \dfrac{5x-10}{x^2-5x+6}$

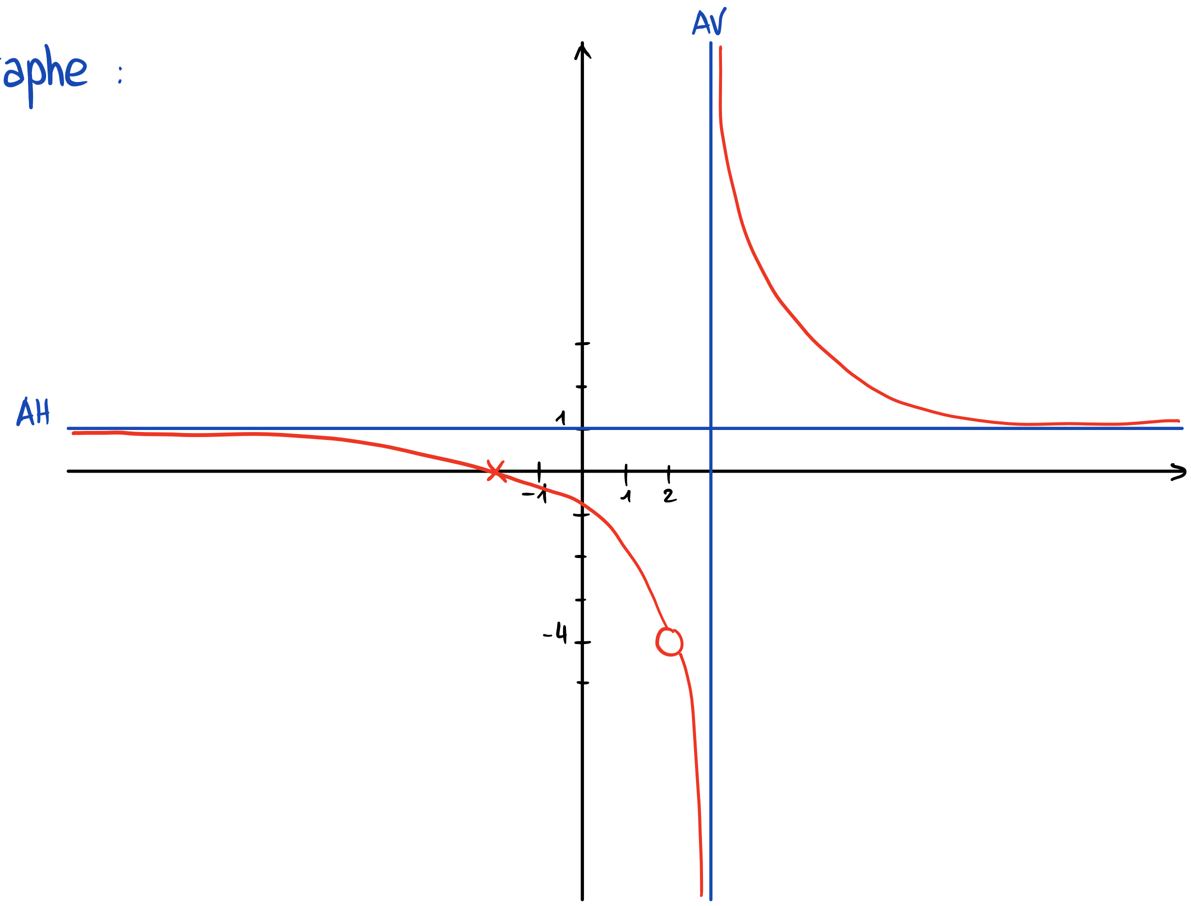
zéro de $\delta(x)$: $5x-10=0 \Leftrightarrow (x=2)$

pôles de $\delta(x)$: 2 et 3 (2)

x		2		3	
sgn(δ)	$-$	$\|\|$ (2) (trou)	$-$	$\|\|$	$+$
position	dessous			AV	dessus

$\delta(1000) : \dfrac{+}{+} = +$

4) graphe :



b) $f(x) = \dfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^2+2x+1}$

zéros : $x^3+4x^2+x-6=0$ zéros possibles : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$x=1$: $1+4+1-6=0$ ✓ $\Rightarrow$ Horner :

	1	4	1	-6
1		1	5	6
	1	5	6	0

$\Rightarrow (x-1)(x^2+5x+6) = (x-1)(x+2)(x+3)$

$\Rightarrow$ zéros : $-3, -2$ et 1

pôles : $x^2+2x+1 = (x+1)^2 \Rightarrow$ pôle : -1 (2)

1) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

2) signe :

x		-3		-2		-1		1	
sgn(f)	$-$	0	$+$	0	$-$	‖ (2)	$-$	0	$+$

$f(1000)$: $\frac{+}{+}$

3) asymptotes :

AV/ trou : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \text{"}\frac{-4}{0}\text{"} = \infty \Rightarrow$ $x = -1$ est une AV

AH/AO : AO car $3 = 2 + 1$ $(\mathrm{Deg}(N) = \mathrm{Deg}(D) + 1)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x^2 + x - 6 & x^2 + 2x + 1 \\ \cline{2-2} -\;x^3 \mp 2x^2 \mp x & x + 2 \\ \cline{1-1} 2x^2 - 6 & \\ -2x^2 \mp 4x \mp 2 & \\ \cline{1-1} -4x - 8 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ $y = x + 2$ est une AO

(à gauche et à droite pour les fonctions rationnelles)

étude de position : $\delta(x) = \frac{-4x-8}{x^2+2x+1}$

zéro de δ : $-4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

pôle de δ : -1 (2)

x		-2		-1	
sgn(δ)	$+$	0	$-$	‖	$-$
position	dessus	$\cap$	dessous	‖	dessous

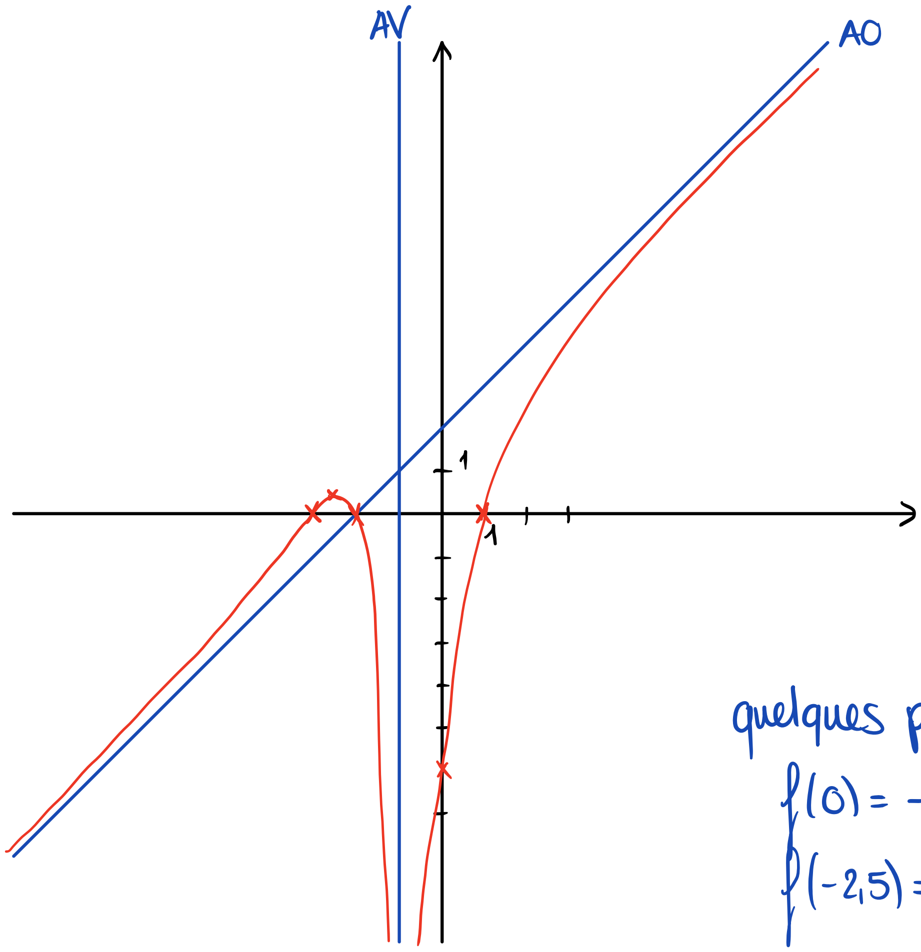
(2) AV

$\delta(1000)$: $\frac{-}{+} = -$

au point $(-2 ; 0)$

$f(-2)$ ou avec AO : $y = -2 + 2 = 0$

4) graphe :



quelques points :

$f(0) = -6$

$f(-2{,}5) = \dfrac{0{,}875}{2{,}25} = 0{,}3\bar{8}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

1) $ED(f)$: cond : $x \geq 0$ et $x \neq 4$ $\Rightarrow$ $ED(f) = \mathbb{R}_+ - \{4\}$

2) zéro : $f(x) = 0 \iff \sqrt{x} - 2 = 0$ | isoler la racine

$\iff \sqrt{x} = 2$ | élever au carré ⚠ aux év. sol. ajoutées.

$\iff x = 2^2 = 4 \notin ED(f)$

$\Rightarrow$ pas de zéro

signe :

x		0		4	
sgn(f)	//////	|	+	||	+

$f(0) = \frac{1}{2}$ (au bord de l'ED(f))

$f(1) = \frac{1}{3} > 0$

$f(9) = \frac{1}{5} > 0$

3) asymptotes :

AV/trou : $\lim_{x\to 4} f(x) \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{conjugué}}{=}} \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(4;\frac{1}{4}\right)$ est un "trou"

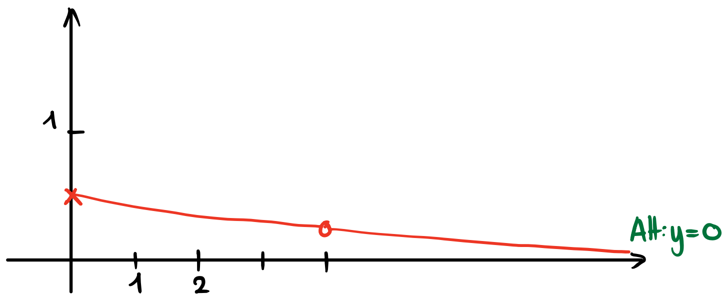
AH/AO

à $+\infty$: $\lim_{x\to +\infty} f(x) \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{\text{conjugué}}{=}} \dots = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$\Rightarrow$ $y = 0$ est une AHD

à $-\infty$: pas défini ($ED(f)$)

4) graphe :



d) $f(x) = 5x + 3\sqrt{x^2-x}$

1) $ED(f)$: cond : $x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \geq 0$ parabole convexe ($a=1>0$)

avec 0 et 1 comme zéro : + | − | + (0, 1)

$\Rightarrow ED(f) =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

2) zéro : $5x + 3\sqrt{x^2-x} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2-x} = -5x$ | isoler la racine

$\Leftrightarrow 9(x^2-x) = 25x^2$ | élever au carré ⚠ vérif. les solutions

$\Leftrightarrow 16x^2 + 9x = 0$

$\Leftrightarrow x(16x+9) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{9}{16}$

vérif : $x = 0$: $5 \cdot 0 + 3\sqrt{0-0} = 0$ ✓ ou $-\frac{45}{16} + 3\sqrt{\frac{81}{256} + \frac{9}{16}} = 0$ ✓

signe :

x		$-9/16$		0		1	
$\mathrm{sgn}(f)$	$-$	0	$+$	ϕ	//////	|	$+$

$f(-1) = -5+3\sqrt{2} < 0$ $\quad$ $f(-0{,}5)>0$ $\quad$ $f(1) = 5>0$ (bord de l'ED(f))

3) asymptotes

<u>AV/hou</u> : rien car pas de pôle

<u>AH/AO</u> :

à $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \text{“}-\infty+\infty\text{''}$ f.i. (conjugué) $= \lim\limits_{x\to-\infty} (5x+3\sqrt{x^2-x})\cdot\dfrac{5x-3\sqrt{x^2-x}}{5x-3\sqrt{x^2-x}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{25x^2-9(x^2-x)}{5x-3\underbrace{|x|}_{-x}\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{16x^2}{x(5+3\sqrt{1\ldots})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{16x^2}{8x} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty \qquad \text{(pas d'AHG)}$$

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x+3\sqrt{x^2-x}}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{5x+3\overbrace{|x|}^{-x \text{ car } x<0}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x(5-3\sqrt{1+\ldots})}{x} = 5-3 = 2$$

$$h = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x) = \lim_{x\to-\infty}(3x+3\sqrt{x^2-x}) = \text{“}-\infty+\infty\text{''} \quad \text{f.i. (conjugué)}$$

$$= \ldots = \lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2-9(x^2-x)}{3x-3\underbrace{|x|}_{-x \text{ car } x<0}\sqrt{1-\ldots}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{9x}{3x(1+\sqrt{1+\ldots})} = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ $y = 2x+\frac{3}{2}$ est l'AOG de f.

à $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \text{“}+\infty+\infty\text{''} = +\infty$ (pas d'AHD)

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \ldots = 5+3 = 8$$

$$h = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - 8x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(3\sqrt{x^2-x} - 3x\right) = \text{“}-\infty+\infty\text{''} \text{ f.i. (conjugué)}$$

$$= \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{9(x^2-x)-9x^2}{3\underbrace{|x|}_{x \text{ car } x>0}\sqrt{1-\ldots} + 3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-9x}{3x(\sqrt{1+\ldots}+1)} = -\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ $y = 8x - \frac{3}{2}$ est l'AOG de f.

4) graphe :